動いている剛体、ならびに時計に関する変換公式の物理的意味

静止系 K に対してその x 軸正の方向に速度 v で移動している慣性系 k を考える。（但し、k 系の座標軸 ξ, η, ζ, τ はそれぞれ、K 系の座標軸 x, y, z, t に対応する。）このとき、ローレンツ変換公式は、

$$\begin{aligned}\tau &= \beta(v) \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \\ \xi &= \beta(v) \cdot (x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z.\end{aligned}$$

但し、

$$\beta(v) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

となる。

今、半径 R の剛体球が k 系の座標原点に固定されているものとすると、k 系から見ると、

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

が成り立っている。変換公式を代入することにより、

$$\left\{\frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right\}^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

これは速度 v で x 軸正の方向に進む半径 R の剛体球をを表すので $x' = x - vt$ と置くと、

$$\left\{\frac{x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right\}^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

これは、3 軸の長さが、

$$R\sqrt{1-(v/c)^2},\ R,\ R$$

という回転楕円体の形になる。これは走っている方向に対して、$1 : \sqrt{1-(v/c)^2}$ の割合で収縮したように見えることを表している。

次に、k 系の座標原点に固定された時計が K 系の時計に対してどのようなテンポで時を刻むのか？を考えてみよう。変換公式より、

$$\tau = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

ここで、静止系からみた k 系の座標原点の位置は $x = vt$ になるから、これを代入すると、

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = t - \left\{1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right\} t$$

より、静止系で考えると、静止系の時間の一秒ごとに $\left\{1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right\}$ 秒ずつ走っている時計が遅れることになる。

速度の合成則

k 系から眺めたとき、1 個の点が方程式

$$\xi = w_\xi \tau, \qquad \eta = w_\eta \tau, \qquad \zeta = 0$$

に従って運動していたとする。ここで w_ξ, w_η はそれぞれ、ξ 方向、η 方向の速度とする。さてここでこの運動を K 系から見た場合どうなるのかを調べてみよう。変換公式に代入すると、

$$\begin{aligned}
w_\xi \tau = \quad & \xi \quad = \beta(v)\cdot(x - vt), \\
w_\eta \tau = \quad & \eta \quad = y, \\
0 = \quad & \zeta \quad = z, \\
\tau = \quad & \qquad \beta(v)\cdot\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)
\end{aligned}$$

より、

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + (v w_\xi / c^2)} t, \qquad y = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v w_\xi / c^2)} w_\eta t, \qquad z = 0.$$

これを見れば分かるように、速度の合成に関する平行四辺形の法則はただ（v/c, および w/c の）1 次までの範囲で、近似的に成立するにすぎないことがわかる。

今、

$$\begin{aligned} U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= (w_\xi)^2 + (w_\eta)^2, \\ \alpha &= \arctan(w_\eta / w_\xi). \end{aligned}$$

と置くと、

$$\left(\frac{w}{w_\xi}\right)^2 = 1 + \left(\frac{w_\eta}{w_\xi}\right)^2 = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

より、

$$w_\xi = w\cos\alpha, \qquad w_\eta = w_\xi \tan\alpha = w_\xi \sin\alpha \cdot \frac{w}{w_\xi} = w\sin\alpha.$$

より、

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - (vw\sin\alpha/c)^2}}{1 + (vw\cos\alpha/c^2)}$$

が得られる。U は合成された速さを表し、その進む向きは v に対して角度 α となる。ここで、v と w が対称的に式に現れることより、$x = w_\xi t, y = w_\eta t$ で走る系から、x 軸の正方向に速度 v で走る点が射出されたとき、その点を静止系から見ても、上と同じ結果が得られることが想像できる。

上の式より、もし α が 0、つまり $w_\eta = 0$ の x 軸に平行な運動の場合、

$$U = \frac{v + w}{1 + (vw/c^2)}$$

となるがこの式において、c より小さい正実数 κ, λ にて、$v = c - \kappa,\ w = c - \lambda$ と置くと、

$$U = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \dfrac{\kappa\lambda}{c}} < c$$

となり、光速 c より小さい速さ同士の和は、常に c より小さいことがわかる。また光速に光速より小さい速さを加えても、光速に光速を加えてもその結果は同じ c のままであることも分かる。

v と w が同じ方向を持つ場合に対する合成速度 U の公式を求めたが、これは、ローレンツ変換を 2 回繰り返しても得られる。今、座標系 K および k の他に、第 3 の座標系 k' を考える。k' 系の座標原点は k 系に対して、速度 w で Ξ 軸上を正の方向に移動しているものとするのである。そうすると、k' 系の座標 x', y', z', t' と、これに対応する K 系の x, y, z, t との間に、

$$
\begin{aligned}
\tau = &\quad \beta(v)\cdot\left(t-\frac{v}{c^2}x\right), & t' &= \beta(w)\cdot\left(\tau-\frac{w}{c^2}\xi\right),\\
\xi = &\quad \beta(v)\cdot(x-vt), & x' &= \beta(w)\cdot(\xi-w\tau),\\
\eta = &\quad y, & y' &= \eta,\\
\zeta = &\quad z, & z' &= \zeta,
\end{aligned}
$$

但し、

$$\beta(v) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

の関係が成り立っているので、

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta(w)(\xi-w\tau)\\
&= \beta(w)\left\{\beta(v)(x-vt)-w\beta(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\right\}\\
&= \beta(v)\beta(w)\left(x-vt-wt+\frac{vw}{c^2}x\right)\\
&= \beta(v)\beta(w)\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)\left(x-\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}t\right)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\beta(v)\beta(w)\left(1+\frac{vw}{c^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(w/c)^2}}\times\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)\\
&= \frac{1+\frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2+w^2}{c^2}+\frac{v^2w^2}{c^4}}}\\
&= \frac{1+\frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1+2\frac{vw}{c^2}+\frac{v^2w^2}{c^4}-\frac{(v+w)^2}{c^2}}}\\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{v+w}{c\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)}\right)^2}
\end{aligned}
$$

より、速さが v から、$\dfrac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$ に変わっていることが確かめられる。