いわゆるウラシマ効果について

兄弟の兄のほうがロケットに乗って光速に近い速さで運動して地球に戻ってくると弟のほうが兄より歳をとってしまうという相対論的効果であるウラシマ効果について簡単かつ明快 (!?) に説明したいと思います。(全 3 ページ)

1.1　世界間隔

ここでは取り敢えず次の事実を証明抜きで成り立つものとする．なお証明はおって更新する予定である．

光速度不変の原理から次の量が加速および減速する物体の運動に関して座標変換で不変であることが知られている:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.1}$$

この式は非常に短い時間 dt の間に非常に短い距離 $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 進むときに成り立つ式であるが，観測する座標系に依らず成り立つことが知られている．つまり物体の移動が $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ にみえる座標系での微小時間を dt, 或いは物体の移動が $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ にみえる座標系での微小時間を dt' とすれば,

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = ds'^2 \tag{1.2}$$

が成り立つ.

1.2　兄の時計と弟の時計を比較する

さて静止している弟の持っている時計で微小時間 dt の間に動いている兄の進む距離は,

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{1.3}$$

となる．ここで兄の持っている時計がこの間に進む微小時間を dt' とすると，兄と一緒に動く系ではこの時計は静止しているのだから，$dx' = dy' = dz' = 0$ である．従って世界間隔の不変性より,

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 = ds'^2 = c^2dt'^2 \tag{1.4}$$

これより,

$$dt' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}}dt \tag{1.5}$$

ここでこの式が成り立つ瞬間の兄の弟に対する運動の速さを $v = v(t)$ とすると,

$$v(t)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \tag{1.6}$$

より,

$$dt' = \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}dt \tag{1.7}$$

が成り立つ．これは微小時間で成り立つ式だから，兄の運動が加減速があっても成り立っている．そこでこの式の両辺を弟の時計で出発時刻 t_1 から到着時刻 t_2 まで積分すれば，兄の持っている時計では出発時刻が t'_1，到着時刻が t'_2 だから,

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}dt \tag{1.8}$$

が成り立つことになる．これが運動系と静止系の間の一定の時間間隔をとったときの時計の遅れを表す式である.

1.3 解を分析する

右辺を見ると任意の $v(t)$ で,

$$0 \leq 1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2 \leq 1 \tag{1.9}$$

が成り立つから

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \leq \int_{t_1}^{t^2} dt = t_2 - t_2 \tag{1.10}$$

より,

$$t'_2 - t'_1 \leq t_2 - t_1 \tag{1.11}$$

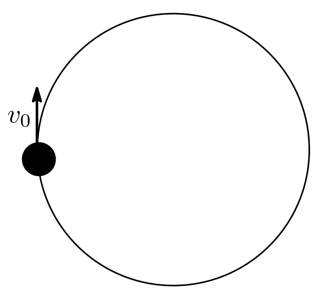
が成り立ち,兄の運動方向によらずに,少しでも兄が弟に対して動いていれば常に兄の時計の方が時間間隔が狭く,つまり遅れていることが分かる.話をやや簡単にするため地球を出発した時点での両者の時計をそれぞれ合わせておいて,$t_1 = t'_1 = 0$,兄が地球に戻ってきたときの弟の時刻を t,兄の時刻を t' とすれば,

$$t' < t \tag{1.12}$$

となる.これは相対論的効果によるのであるが,特殊相対論を少し聞きかじった人だとこう考えるかもしれない.すなわち,『相対性原理によれば兄から見れば弟の方が運動している.従って兄から見ると弟の時計のほうが遅れるんじゃないのか?』

もちろん,この考えは間違っている.弟が静止しているのに対して,兄は加減速しているからであるが,このことは数式を立てる段階でキチンと区別されている.なぜなら (1.8) 式は,あくまでも兄が弟に対して運動している場合に成り立つ式だからである.一方兄の運動は本来は位置ベクトルの時間微分が速度なのでベクトルであるが,この式にはスカラーの $v(t)$ しかあらわれない.これは兄の運動の方向は全く関係なく,単に運動の速さのみで時間の遅れが決まることになる.従って, 兄は円運動で地球から出発して帰ってきても (1.8) は使えるし,まっすぐ進んでから U ターンしたとしても全く同じ式が使えることになるが,この積分を具体的に計算するのは少々骨が折れる.それは単純にルートの中身に速さの関数 $v(t)$ が入っているから,本来弟のいる地球に静止していた兄が加速して地球を離れ,再び地球に戻ってきて減速して弟と出会う,という条件設定の場合,速度 0 から加速し再び速度 0 になるような関数 $v = v(t)$ に対して積分を実行しなければならないからである*1.

そこでここでは最も簡単な例として加速・減速のない,一定の速さ $v(t) = v_0$ の場合の時間の遅れについて考えてみよう.この設定では兄は地球を出発した最初から速さ v_0 で弟の前を時刻 $t' = t = 0$ の瞬間に通り過ぎるということになる.この場合時計は兄が弟の目の前を通り過ぎるとき,弟の時計を見ても,逆に弟が目の前を通り過ぎる兄の時計を見てもともに 0 であるようになっていると仮定する.また兄の運動は速さ一定なら何でもよいから,例えば最も簡単に円運動だと仮定しよう.すると (1.8) より



兄の乗ったロケットの運動

$$t' = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} t \tag{1.13}$$

---

*1 そのような速さの関数としては具体的には $v(t) = [1 - (t-1)^2]v_0$ などとすれば条件を満たしかつ解析的に解ける.

の関係が成り立つことになる．この式は $t' = t = 0$ に弟の目の前を通り過ぎた兄が兄の時計で t' のときに弟の目の前を再び通り過ぎるときの兄と弟の時計の時刻の差を表している．既に述べたように,

$$\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} < 1 \tag{1.14}$$

より $t' < t$ であるから兄の時計の方が弟の時計より遅れていることになる．このことは弟が兄の時計を見た場合でも，逆に兄が弟の時計を見た場合にも成り立つ式なので本当に兄の時計のほうが遅れていることを表している．イメージが湧くように具体的に数値を入れて確かめてみよう．いま，兄の運動速度を $v_0 = 0.9c$ としよう．すると (1.13) 式より，

$$t' = \sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}t = \sqrt{1-\left(\frac{0.9c}{c}\right)^2}t = \sqrt{1-0.81}t = \sqrt{0.19}t \simeq 0.44t \tag{1.15}$$

を得る．兄のロケットの弟から見た運動時間 t を 1 年間とすると，地球に戻ってきたとき，兄の時計は，$0.44 \times 365 = 160.6$ より約 160 日しかたっていないことになる．これが世に言うウラシマ効果である[*2].

[*2] なお，ここでの議論を見れば分かるとおり特殊相対論のみで議論している．ウラシマ効果が本質的に加速・減速が必要だからといって一般相対論をもちだすまでもないのである．