ミンコフスキー図（時空図）はスケール変換が必要！

特殊相対論の啓蒙書などに良く現れるローレンツ変換の幾何学的表現であるミンコフスキー図（＝時空図）には 2 つの系の間に同じスケールを持たせることは出来ず，スケール変換が必要になります。しかし多くの場合そのことは触れられず，従ってスケール変換の係数も書かれていない場合が多いようです。ミンコフスキー図自体はローレンツ変換の直感的理解にとって大変役に立つ便利なものですがこれでは間違えて覚えてしまいかねません。そこでここではローレンツ変換の式を前提条件として，このミンコフスキー図の妥当性とそのスケール変換の係数を求めたいと思います。

まず K 系の x 軸正の向きに K' 系が速度 v で運動しているときのローレンツ変換の式は次のとおりです:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1-(v/c)^2}},
\end{aligned}
$$

ここで二つの系の相対速度 v は x 軸方向だけで，y, z 軸方向は関係ないので，y, z は省略することにします．またこのままでは, x' の式と t' の式の対称性が分かりづらいので次のように変形します:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - v/c \cdot ct}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \\
ct' &= \frac{ct - v/c \cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}},
\end{aligned}
$$

さてこの式をさらに見やすくするため，$\beta \equiv v/c$, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ と置き，新たに，$w \equiv ct$ とすると，

$$x' = \gamma(x - \beta w), \tag{1}$$

$$w' = \gamma(w - \beta x), \tag{2}$$

と表せます．この式は明らかに x と w に関して対称な形をしていてこの点がローレンツ変換がガリレイ変換と根本的に異なる点です．さてこの関係式を一枚のグラフに表すことが出来ないか考えてみましょう．

まず，K 系については通常の直交座標で表すことにしましょう．横軸に x，縦軸に w です．こうすると実は $w = \pm x$ が光速度で x 軸正の向き或いは負の向きに運動する物体の軌跡を表すことになります．これは $w = ct$ だから $x = \pm w = \pm ct$ となることから明らかだと思います.

次に K' 系を考えます．まず，x' 軸ですが，x' 軸とは式で表すとどういう直線になるか考えてみると，結局 w' 座標が 0 の点全体から出来ていることがわかります．これは (2) 式より，$w' = \gamma(w - \beta x) = 0$，即ち，$w = \beta x$ ということになります．$\beta = v/c < 1$ ですから，x' 軸は傾きが 1 より小さい直線となります.

一方 w' 軸は同じように考えて $x' = 0$ となる直線になりますから，(1) 式より，$x = \beta w$，即ち，$w = 1/\beta x$ となります．これは傾きが 1 より大きい直線ですが，大切なのは直線 $w = x$ に関して x' 軸と w' 軸が対称になっている点です．最初に決めた x 軸と w 軸も同じように対称になっていますが，これが意味するのは，直線 $w = x$ と直線 $w' = x'$ が同じものを表していることにあります.

x' 軸および w' 軸が決まったところで，この斜交座標で表された K' 系（に対応する座標）の位置 (X', W') が (X, W) を用いてどのように表されるのか考えてみましょう．今の段階では，ローレンツ変換と矛盾しないように x' 軸として $w = \beta x$，w' 軸として $x = \beta w$ と置いたものを一枚のグラフに重ねて描いたときどうなるのか？を考えているだけなので，これだけではキチンとローレンツ変換が再現できるのかどうかはまだ分かりません．次のページにこの状況をグラフで示します:

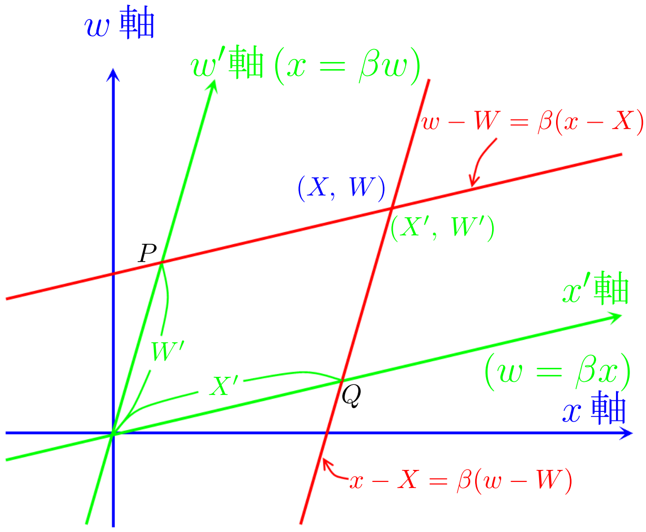
右の図のように，K' 系に対応する斜交座標の点 $(X',\ W')$ を K 系の座標 $(X,\ W)$ で表すことにすると，交点 P の計算によって，W' が $X,\ W$ で表され，交点 Q の計算によって X' が $X,\ W$ で表されることになります．

まず，交点 P の計算を試してみましょう．交点 P は，直線 $w-W=\beta(x-X)$ と w' 軸との交点だから，その K 系で測った座標を $(x,\ w)$ とすると，

$$\text{交点 } P: \begin{cases} w-W=\beta(x-X), \\ x=\beta w, \end{cases} \tag{3}$$

より，

$$\begin{aligned} & w-W=\beta(\beta w-X)=\beta^2 w-\beta X, \\ \therefore\quad & (1-\beta^2)w=W-\beta X, \\ \therefore\quad & w=\frac{W-\beta X}{1-\beta^2}, \end{aligned}$$



K 系と K' 系の時空図

が得られます．ここで $x=\beta w$ だから，三平方の定理より，

$$\begin{aligned} & (W')^2=x^2+w^2=(1+\beta^2)w^2, \\ \therefore\quad & W'=\sqrt{1+\beta^2}w=\sqrt{1+\beta^2}\frac{W-\beta X}{1-\beta^2}=\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\frac{W-\beta X}{\sqrt{1-\beta^2}}=\sqrt{\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}}\gamma(W-\beta X) \end{aligned} \tag{4}$$

が得られました．次に交点 Q について考えてみましょう．交点 P の式と同じようにキチンと計算をしてもかまいませんが，ここではもっと簡単に出来ないか考えてみましょう．いま，w' 軸と x' 軸はそれぞれ $x=\beta w,\ w=\beta x$ となって，式で表すと x と w が入れ替わっただけです．交点 P，Q を求めるために用いるために用いる式も，それぞれ $w-W=\beta(x-X),\ x-X=\beta(w-W)$ となりやはり x と w（と $X,\ W$）を入れ替えただけの式になっています．ということは，交点Qでは，交点 P についての式から得られた，(4) のなかの X と W を入れ替えた式即ち，

$$X'=\sqrt{\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}}\gamma(X-\beta W) \tag{5}$$

が成り立つことになります．まとめると，(4), (5) は，

$$\begin{cases} X'=\sqrt{\dfrac{c^2+v^2}{c^2-v^2}}\gamma(X-\beta W), \\ W'=\sqrt{\dfrac{c^2+v^2}{c^2-v^2}}\gamma(W-\beta X), \end{cases} \tag{6}$$

この式は，非常にローレンツ変換とよく似た形をしています．ここで皆さんは不思議に思うかもしれません．もともとローレンツ変換を仮定して計算を進めたのだからローレンツ変換が出てくるのがあたりまえなんじゃないのか？と．しかし，この証明の流れをよく確認していただければ分かるとおり，ここで私たちが行ったのは，ローレンツ変換の式と矛盾しないように，K' 系の x' 軸と w' 軸をとっただけなのです．そしてそのとき，図のように長さをとってしまうと，X' も W' もどちらも系の速度に依存する定数，

$$\sqrt{\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}} \tag{7}$$

倍だけローレンツ変換より長くなってしまうということが分かったわけです．ここでこの定数は時空上の位置 $(x,\ w)$ には依存しない系の速度だけに依存する定数です．ということは，あらかじめ K' のスケールを，$\sqrt{\dfrac{c^2+v^2}{c^2-v^2}}$ 倍するものだと考えれば，この一枚のグラフの中に K 系と K' 系で観測した物体の運動がキチンと表現できることになり大変便利です．そのためこの図をこのことに最初に気づいた数学者のミンコフスキーの名前にちなんで，ミンコフスキー図或いは単に時空図とよびます．