

相対論的マクスウェル方程式について

よく知られているように、相対論は電磁気学における諸問題を真剣に考察することによって生まれた。特にマクスウェル方程式がローレンツ変換で保存することが本質的である。ここではマクスウェル方程式の共変性がはっきりと分かる、相対論的なマクスウェル方程式を導くことにする。

1.1 真空中のマクスウェル方程式

マクスウェル方程式は次の方程式の組である:

$$1. \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

$$2. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

$$3. \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$4. \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1.4)$$

この式は一見すると4つの方程式に見えるが、言うまでもなく、式2、および式4は3つのベクトルの成分からなる式なので、成分の数で言うと、全部で8つの方程式からなる。またこの式において \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{D} は電束密度、 \mathbf{H} は磁場を表す。また ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度を表す。特に真空中では、真空の誘電率 ϵ_0 および真空の透磁率 μ_0 を用いて、

$$5. \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

$$6. \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

と表されるので、3式に5式を代入して両辺を ϵ_0 で割ると、

$$3'. \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

また、4式に μ_0 をかけて、5、6式を代入すると、

$$4'. \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.8)$$

が得られる。但し、 $c = 1/\epsilon_0 \mu_0$ を用いた。

以上より、真空中のマクスウェル方程式は、

$$1. \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.9)$$

$$2. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.10)$$

$$3'. \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

$$4'. \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1.12)$$

と表せることが分かった。ここで一応注意しておく、真空中とはいっても3'式の右辺には電荷の分布を表す ρ が存在するし、4'式にも電流の分布を表す \mathbf{j} があるから完全な意味での真空ではないことに注意が必要である。要は真空中に電荷や電流があるが、誘電体や磁性体の存在を考えないという意味であり、完全な真空状態とは異なるより一般的な状態を考えている。完全な真空中でも電磁波は伝わるが、必ずしも完全な真空ではなくてもよいのだ。

1.2 ベクトルポテンシャル・スカラーポテンシャル

この項ではベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いて、マックスウェル方程式 1, 2, 3', 4' のうちの 1, 2 を置き換えてみよう。この置き換えにより、 \mathbf{B} および \mathbf{E} を使わずにベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いる限りは、実質的に条件 1, 2 を消去できる。

まず純粋に数学の定理としてつぎの 2 つの定理が存在する:

定理 1.1 (ベクトルポテンシャルの存在定理). 次の 2 つの命題はそれぞれ同値である:

$$\text{任意の点で } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \text{あるベクトル場 } \mathbf{A} \text{ が存在して, } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.13)$$

定理 1.2 (スカラーポテンシャルの存在定理). 次の 2 つの命題はそれぞれ同値である:

$$\text{任意の点で } \nabla \times \mathbf{C} = 0 \Leftrightarrow \text{あるスカラー場 } \phi \text{ が存在して, } \mathbf{C} = -\nabla \phi \quad (1.14)$$

この 2 つの定理より直ちに,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (1.15)$$

や,

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0, \quad (1.16)$$

が得られる。このとき、 \mathbf{A} をベクトルポテンシャル、 ϕ をスカラーポテンシャルとよぶ。

この定理より 1 式は直ちに、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ なるベクトルポテンシャル \mathbf{A} に置き換えられる。

$$1' \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.17)$$

また、2 式はベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いると、

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) \quad (1.18)$$

と表されるので、定理 1.2 を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (1.19)$$

と表され、従って、

$$2' \cdot \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

に置き換えられる。

1.3 式 3, 4 を書き換える

前節の結果より, 式 1, 式 2 はそれぞれ,

$$1'. \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.21)$$

$$2'. \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.22)$$

に置き換えられたのでこれらを 4' 左辺に代入すると,

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1.23)$$

が得られるが, ベクトル解析の公式,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (1.24)$$

を用いると,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1.25)$$

$$= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} + \nabla \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} \right], \quad (1.26)$$

が成り立つので, 結局 4' は,

$$4''. \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} + \nabla \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.27)$$

の形になる.

以上により, ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を使って表したマックスウェル方程式は 4'' と 3' の 2 つで表されることになったので, この 3' を 4'' に似た形にできないか考えてみる.

まず, 3' 左辺に 2' を代入すると,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.28)$$

だから,

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.29)$$

であるが, x^i に $x^0 = ct$ を対応させるため, 両辺を c で割っておこう:

$$-\nabla^2 \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{c\varepsilon_0} = \frac{\rho c}{c^2\varepsilon_0} = \mu_0 \rho c, \quad (1.30)$$

だから,

$$3''. -\nabla^2 \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \rho c, \quad (1.31)$$

が得られるのでこれを 4'' と比較しよう. いま, 4'' はベクトル方程式で 3'' はスカラーの方程式である. そこで 4'' の成分,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^i + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = \mu_0 j^i, \quad (1.32)$$

と $3''$ を比較すると、 $3''$ には $4''$ の初項に該当する、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\phi}{c} \right), \quad (1.33)$$

がないことが分かる。そこで少しでも形が近くなることを想定して、 $3''$ にこの項を足してから引いてみよう：

$$-\nabla^2 \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\phi}{c} \right) - \nabla^2 \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.34)$$

$$= \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] \quad (1.35)$$

これより、

$$3''' \cdot \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = \mu_0 \rho c \quad (1.36)$$

が得られた。

結局、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ によって、マックスウェル方程式は、次の2つの式で表せることが分かった：

$$3''' \cdot \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \left(\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = \mu_0 \rho c, \quad (1.37)$$

$$4'' \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} + \nabla \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.38)$$

ここで、今のところキチンとベクトルになるかどうかはまだ分からないが、

$$(A^\mu) = \left(\left(\frac{\phi}{c} \right), \mathbf{A} \right), \quad (1.39)$$

$$(j^\mu) = (\rho c, \mathbf{j}), \quad (1.40)$$

と置くことができるなら、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square, \quad (1.41)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{c} \right) + \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_\nu A^\nu, \quad (1.42)$$

より、

$$\partial^\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\nu, \quad (1.43)$$

に注意して、

——— 相対論的マックスウェル方程式 I ———

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^\mu, \quad (1.44)$$

が成り立つことが分かった。これが相対論的マックスウェル方程式である。この式において、ダランベルシアンが、

$$\square = \partial^\nu \partial_\nu \quad (1.45)$$

と表せることより、

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \mu_0 j^\mu, \quad (1.46)$$

と表しても良い。ここで A^μ , j^μ が 4 元反変ベクトルであることは次の項で示す。

1.4 A^μ , j^μ が反変ベクトルであることの証明

まず簡単な, j^μ について示す。2 通りの方法で示すが, まあ, 好みの問題だろう。

■方法 1 マクスウェル方程式の 4 式に $\nabla \cdot$ を (左から) 作用させると,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.47)$$

であるが, ベクトルポテンシャルの存在定理のところで述べたように,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0, \quad (1.48)$$

が常に成り立つ。そこで, 第 2 項に, マクスウェル方程式の第 3 式を代入すると,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.49)$$

つまり,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.50)$$

これは, 書き換えると,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.51)$$

となり, この関係がローレンツ共変で任意の座標系で右辺がスカラー 0 であるということ, ∂_μ が共変ベクトルであることより j^μ は反変ベクトルであることが分かる。(もしそうでないと座標変換したときに右辺の値が変わってしまう。)

■方法 2 実は方法 1 で示したように, 元のマクスウェル方程式に戻らなくても, (1.46) を直に μ で微分しても同じ結果が得られる:

$$\mu_0 \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu - \partial^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu - \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.52)$$

より, 方法 1 と全く同様に,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.53)$$

が得られた。

次に A^μ が反変ベクトルであることであるが, 我々は既に, (1.46) の右辺の $\mu_0 j^\mu$ が反変ベクトルであることを知っている。ここでもし A^μ が反変ベクトルでないとすると, 左辺に現れる, $\partial^\nu \partial_\nu$ がスカラー演算子であり, $\partial^\mu \partial_\nu$ が 2 階の混合テンソルであることより, 左辺全体が反変ベクトルにならなくなってしまうであろう。従って, A^μ は反変ベクトルでなければならない。