固有時の概念の導入と各物理量について

0.1　固有時

ローレンツ変換

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} \right)$$
$$x' = \gamma \left(x - vt \right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$\text{但し，} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

に対して，$w \equiv ct$（つまり $w' = ct'$）とし，ミンコフスキー空間におけるユークリッド空間の長さに対応する量を s とすると，

$$\begin{aligned}
{s'}^2 &= -(\omega')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \\
&= -c^2 \left\{ \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \right\}^2 + \gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 \\
&= -c^2 \gamma^2 t^2 + 2\gamma^2 vtx - \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 x^2 + \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 vtx + \gamma^2 v^2 t^2 + y^2 + z^2 \\
&= -(c^2 - v^2)\gamma^2 t^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 \\
&= -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
&= -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
&= s^2
\end{aligned}$$

より，s はローレンツ変換に対して不変量であることが分かる．これを加速のある場合についても適用できるようにするためには，充分短い時間に対しては，速度がほぼ一定であると出来ることより，

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} -d\omega^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

と置くと，この ds が一般の場合でも不変量になる．ここでこの不変量 ds についてその物理的意味を考えてみよう．ある運動する物体を考えるとき，この物体が静止しているように見える座標系から眺める観測者に対して当然 $dx = dy = dz = 0$ である．即ち，$ds^2 = -d\omega^2 = (icdt)^2$ となる．これは ic 倍を除けば通常の時間と全く一緒である．ここで c は座標系に寄らない一定の定数であるため，上の式の両辺を $-c^2$ で割って，あらためて，$d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ic} ds$ と置けば τ の次元は時間の単位となり，この物体が光速よりはるかに遅い速度で移動するニュートン力学的極限においては，通常の時刻とほぼ一致し，極めて自然な拡張である事が分かる．そこであらためて，

$$d\tau^2 \stackrel{\text{def}}{=} dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2 - \frac{1}{c^2} dy^2 - \frac{1}{c^2} dz^2$$

によって τ を定義しておくことにする．この定義により，$d\tau$ は，観測者が対象となる物体と同じ座標系をとった場合，普通の意味での時刻を表し，なおかつこの値はローレンツ変換で不変な量となる．つまり座標系の選び方によらず，一般的に通用する便利な時間を表しているものと考えられる．これをそれぞれの立場の固有の時間という意味で，『固有時』と呼ぶ．

0.2　4 元速度

さて，これで一応時間については座標系の選び方に寄らない固有時を定義できた．しかし，ニュートンの法則はガリレイ変換で不変であるが，ローレンツ変換では式の形が変わってしまう．また速度についても，本来なら上で定義した固有時を使うべきである．そこで次の量を考えよう．

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) \equiv \left(\frac{d\omega}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$$

x, y, z 成分については通常の速度と殆ど一緒であるのが見て取れるだろう．ただし，ここではどの立場でも共通な絶対時が存在しないのだから，dt の替わりに固有時 $d\tau$ で割っている．これは第 1 成分 u^0 の意味が現時点で不明な点を除けば，通常の速度のごく自然な修正と言えそうだ．ちなみに上の右辺を通常の x, y, z, t で表すと次のようになる．（具体的計算内容は続いて説明する．）

$$(u^0, u^1, u^2, u^3) = \left(c\gamma, \gamma\frac{dx}{dt}, \gamma\frac{dy}{dt}, \gamma\frac{dz}{dt} \right)$$

今，$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ において，速度 v の現れる項は，同じ単位の速度 c で割っていて他には単位が現れてこない．つまり γ は無次元である．そもそもが τ の次元が時間の次元と等しいのだったから当たり前なのだが，単位が合っている事は一応触れるべきだろう．v が充分小さいとき，この速度は時間軸方向の成分を表す初項はほぼ c となり，その他の項は通常の速度の定義とほぼ一緒の値になる．また $v = c$ のときこの『新しい速度』は無限大となり，それ以上加速できないことも表すので，かなり自然な修正であることが分かると思う．それでは先ほど飛ばした計算部分を説明しよう．まず，固有時の定義式

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - \frac{1}{c^2}dx^2 - \frac{1}{c^2}dy^2 - \frac{1}{c^2}dz^2$$

の両辺を dt^2 で割ってみよう．すると，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{c^2}\left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\} \\
&= 1 - \frac{v^2}{c^2} \\
&= \frac{1}{\gamma^2} \\
\therefore \quad \frac{dt}{d\tau} &= \gamma \qquad (\because \tau\text{の向きを } t \text{ と逆向きに取るのは不自然なので})
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{dct}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma$$

が得られた．残りの成分は式の対称性より 1 成分だけ示せば充分であろう．合成関数の微分より，

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\
&= \gamma\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

が得られた．

0.3　4 元運動量

4 元速度が定義されたので，次は 4 元運動量である．通常の運動量と同様に速度に質量 m を掛ければよい．

$$\begin{aligned}(p^0, p^1, p^2, p^3) &\stackrel{\text{def}}{=} (mu^0, mu^1, mu^2, mu^3) \\ &= \left(\gamma mc, \gamma m\frac{dx}{dt}, \gamma m\frac{dy}{dt}, \gamma m\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}$$

上の定義式は相対論的効果が含まれているので，光速に近い速度でも運動量保存則が成り立つ．裏を返せば，本来運動量とはニュートン物理学の運動量 $m\boldsymbol{v}$ でなく，上の 4 元運動量でなくては，運動量保存則の成り立たない欠陥のある定義だったのである．またこの定義は速度の場合と同様に，v が充分小さいときには近似的に通常の運動量と同じになっている．つまり，むしろこちらが本来の運動量であるとしたほうが自然である．そこで，

$$p^1 \to p_x, p^2 \to p_y, p^3 \to p_z$$

と通常の記法を用いよう．するとここで固有時の定義式

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - \frac{1}{c^2}dx^2 - \frac{1}{c^2}dy^2 - \frac{1}{c^2}dz^2$$

より，

$$\begin{aligned}1 &= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \\ &= \gamma^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ \therefore (mc)^2 &= (\gamma mc)^2 - \left(\gamma m\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\gamma m\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\gamma m\frac{dx}{dt}\right)^2 \\ &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= (p^0)^2 - (p_x)^2 - (p_y)^2 - (p_z)^2 \\ &= (p^0)^2 - \|\boldsymbol{p}\|^2\end{aligned}$$

を得る．これより，

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2m}\frac{d}{dt}(m^2c^2) \\ &= \frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\{(p^0)^2 - {p_x}^2 - {p_y}^2 - {p_z}^2\} \\ &= \frac{1}{2m}\left(2p^0\frac{dp^0}{dt} - 2p_x\frac{dp_x}{dt} - 2p_y\frac{dp_y}{dt} - 2p_z\frac{dp_z}{dt}\right) \\ &= u^0\frac{dp^0}{dt} - u^1\frac{dp_x}{dt} - u_2\frac{dp_y}{dt} - u^3\frac{dp_z}{dt} \\ &= \gamma c\frac{dp^0}{dt} - \gamma v_x\frac{dp_x}{dt} - \gamma v_y\frac{dp_y}{dt} - \gamma v_z\frac{dp_z}{dt} \\ &= \gamma\frac{d}{dt}(cp^0) - \gamma\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\end{aligned}$$

が成り立つ．さて，ここで今，4 元運動量はニュートン力学の運動量のごく自然な修正であることを見てきた．そこで，この 4 元運動量に対して，力 F は，

$$F^i = \frac{dp^i}{dt}$$

とすることが出来るだろう．すると先ほどの式より，

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}$$

が成り立つことが分かる．この式は，cp^0 の時間変化率が，単位時間当たりに外力が粒子に対してする仕事になっている．

$$(mc)^2 = (p^0)^2 - \|\boldsymbol{p}\|^2$$

より，

$$(cp^0)^2 = (mc^2)^2 + c^2\|\boldsymbol{p}\|^2$$

だから，速度 v が 0 のとき，$cp^0 = mc^2$ であることを考慮すると，$cp^0 - mc^2$ で与えられる量を運動エネルギーと定義するのが自然であろう．この解釈は，$|\beta| = |v/c| \ll 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
cp^0 - mc^2 &= \sqrt{(mc^2)^2 - c^2\|\boldsymbol{p}\|^2} - mc^2 \\
&= mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{\|\boldsymbol{p}\|}{mc}\right)^2} - mc^2 \\
&= mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\|\boldsymbol{p}\|}{mc}\right)^2 + O(\beta^4)\right\} - mc^2 \\
&= \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{2m} + O(\beta^2)
\end{aligned}$$

となり，ニュートン力学での運動エネルギーに一致することからも自然といえる． これより，cp^0 は物体の持つ全エネルギーと解釈するのが自然である．つまり，

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\|\boldsymbol{p}\|c)^2$$

が相対論的なエネルギーの式となる． この式において，マクスウェルの電磁方程式から，光のエネルギーが $E = \|\boldsymbol{p}\|c$ と表せることが分かっているので，光の質量は必然的に 0 であることが導かれる．つまりこの式は，質量の無い光と，物体の持つエネルギーを一つの式で表していることになる．