## 0.1　世界間隔が任意の慣性座標同士の変換で不変であることの証明

ここでは，世界間隔[*1] の導入をする．世界間隔は慣性座標変換で不変な量なので，相対論では重宝する．

### 0.1.1　世界間隔の定義

2 つの事象に対して，$K$ 系と $K'$ から見た第 1 事象の世界点をそれぞれ $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$，$(ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ とし第 2 事象を同様に $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$, $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ とする．このとき,

$$s_{12}^2 \overset{\text{def}}{=} -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{1}$$

という量と

$${s'}_{12}^2 \overset{\text{def}}{=} -c^2(t'_2 - t'_1)^2 + (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \tag{2}$$

という量は，例えば，$K$ 系と $K'$ 系がそれぞれともに慣性系とし，$K$ 系の時刻 $t_1$ に座標 $(x_1, y_1, z_1)$ から光の球面波を放出し，$t_2$ に座標 $(x_2, y_2, z_2)$ に光の球面波の先端 (あるいは表面) が到達したとすれば，ここでの事象 1 が光の球面波の放出，事象 2 が光の球面波の先端が到着するという事象になる．したがってこのとき，$K$ 系が慣性系であることより，光は $c$ で進むから,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{3}$$

が成り立つことになる．したがってこのとき，必ず $s_{12}^2 = 0$ が成り立つ．さてここで，同じ事象を $K'$ 系から見ると，第 1 事象，つまり光の球面波の放

---

[*1] 世界間隔は，別の呼び方として，不変距離，線素などと呼ばれることもある．

出は 4 次元時空座標 $(ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ で起こり，第 2 事象，つまり光の到着は $K$ 系から見た同じ事象を $K'$ 系から見るだけであるので，4 次元時空座標 $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ においてこの事象は起こる．ここで $K$ 系の場合と同様 $K'$ 系も慣性系なので光の進む速さはやはり $c$ となる．したがって $K'$ 系においても，

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 \tag{4}$$

が成り立つので，${s'}^2_{12} = 0$ となる．このようにここで定義された $s^2_{12}$ は光速で隔たれた 4 次元時空上の 2 点の間に対しては，慣性座標系をどのように選んでも必ずゼロになるという特徴がある．実はこの量 $s^2_{12}$ は任意の慣性系間の変換（ローレンツ変換）によって保存するのであるが，ここでは逆にローレンツ変換の表式を利用せずに，上で示したように $s^2_{12} = 0$ のときに限り ${s'}^2_{12} = 0$ となることを用いて，任意の光速で隔たれているとは限らない，4 次元時空上で非常に”近い”2 つの事象の場合に $s^2_{12} \simeq {s'}^2_{12}$ となることを示したい．そしてその 2 つの事象の 4 次元時空上の間隔が無限に小さい場合，微小量として $s^2_{12} \to ds^2$，${s'}^2_{12} \to ds'^2$ と表し，この 2 つの座標系において，$ds^2 = ds'^2$ が成り立つことを示す．わざわざ微小量

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

に対してこのことを示すのは，この微小量での関係 $ds^2 = ds'^2$ が，慣性系間においてつねに成り立つならば，加速を伴う座標変換に対しても微小時間には速度がほぼ一定とできるため，その瞬間，その座標に置かれた時計に対しては，慣性系間の関係が”その瞬間だけ成り立つ”という意味でそっくり利用できるためである．

### 0.1.2　時間的・光的・空間的

前項で光速で隔たれた 4 次元時空上の微小 2 点の差の非ユークリッド的距離の 2 乗

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6}$$

は慣性座標変換をしてもつねにゼロであった．このように $ds^2 = 0$ のとき，光の軌跡はヌル（null）であるとか光的（light-like）であるという．一方，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0 \tag{7}$$

のとき，2 点間の 3 次元ユークリッド空間の微小距離の 2 乗 $dx^2 + dy^2 + dz^2$ は $c^2dt^2$ より小さいから，この場合，この 2 点間は物体を運動させたり，情報でやり取りしたりが理論的には自由にできる．これを時間的（time-like）と呼ぶ．逆に $ds^2 > 0$ の時には 2 点間の 3 次元ユークリッド空間の微小距離の 2 乗は最も速い光をもってしても，$dt$ の間に情報を伝えられず，したがって因果関係を満たせないぐらい空間上の点が離れている．このようなとき，この微小事象間隔を空間的（space-like）と呼ぶ．一般に時間的・光的・空間的は，観測者の座標を変えても変わらないはずである．というのも，観測者の視点によって，2 つの事象の間で因果関係があったり，あるいは無かったりというのは，同じ物理現象を見ていることを考えると不自然でありえないからである．しかし，ここでは，単に時間的・光的・空間的の区分が変わらないことのみではなく，世界間隔の 2 乗の値そのものが，任意の慣性系間の座標で変わらないことを示す．

### 0.1.3　世界間隔が慣性系によらず不変であることの証明

2 つの事象の 4 次元時空上の世界点が非常に小さいものとする．このとき，$dx^\mu \equiv x_2^\mu - x_1^\mu$ だから，

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{8}$$

である． ただし，$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ はミンコフスキー空間の計量 (metric) である．一方，$K'$ 系から同じ事象を眺めた場合，

$$ds'^2 = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \tag{9}$$

が成り立つ．ここで，偏微分のライプニッツ則（連鎖律）より，

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \tag{10}$$

が成り立つから，これを $ds'^2$ の右辺に代入すると，

$$\begin{align} ds'^2 =& \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \tag{11} \\ =& \eta_{\mu'\nu'} \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \right) \left( \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \right) \tag{12} \\ =& \left( \eta_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \right) dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{13} \end{align}$$

したがって，

$$M_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \tag{14}$$

と置けば，

$$ds'^2 = M_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{15}$$

が成り立つ．

ここで $M_{\mu\nu}$ は，慣性系間の相対的な運動によって値が決まる量で，位置や時間の関数では無いことに注意しよう．というのも，位置や時間の関数であったら，それは特殊な位置や時間があることを意味し，時間と空間の一様性に反するからである．したがって，$ds^2$ が時間的・光的・空間的のいずれの場合にも，等しい係数を持つ．これを利用して，係数 $M_{\mu\nu}$ を決定しよう．

いま，光的な場合，$ds^2 = ds'^2 = 0$ だから，

$$c^2 dt^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \tag{16}$$

である．これを代入すると，

$$ds'^2 = M_{00}c^2dt^2 + M_{0j}cdtdx^j + M_{i0}dx^icdt + M_{ij}dx^idx^j \tag{17}$$

$$= M_{00}\delta_{ij}dx^idx^j + 2M_{0k}\sqrt{\delta_{ij}dx^idx^j}dx^k + M_{ij}dx^idx^j \tag{18}$$

ここで，$dx^\mu dy^\nu$ の係数 $M_{\mu\nu}$ と $dx^\nu dx^\mu$ の係数 $M_{\nu\mu}$ は，どちらも $dx^\mu dx^\nu = dx^\nu dx^\mu$ の係数であり，あえて異なる値にとる必要がないことから，$M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu}$，つまり $M$ が対称行列としてよいことを用いた.

この $ds'^2$ は，$c^2dt^2 = \delta_{ij}dx^idx^j$ によって $cdt$ を消去してあるので，任意の $dx^i$ 達で成り立たねばならない．したがって今，$dx > 0, dy = dz = 0$ としてみると，

$$0 = ds'^2 = M_{00}dx^2 + 2M_{01}|dx|dx + M_{11}dx^2 \tag{19}$$

$$= M_{00}dx^2 + 2M_{01}dx^2 + M_{11}dx^2 \tag{20}$$

今度は $x' = -x$ と反転させても成り立つので,

$$0 = ds'^2 = M_{00}dx'^2 + 2M_{01}|dx'|dx' + M_{11}dx'^2 \tag{21}$$

$$= M_{00}dx^2 - 2M_{0i}dx^2 + M_{11}dx^2 \tag{22}$$

これらより,

$$(M_{00} + 2M_{01} + M_{11})dx^2 = 0, \tag{23}$$

$$(M_{00} - 2M_{01} + M_{11})dx^2 = 0, \tag{24}$$

が任意の $dx$ で成り立つので,

$$M_{11} = -M_{00},\ M_{01} = 0, \tag{25}$$

まったく同様のことを $y, z$ に対して行うと,

$$M_{33} = M_{22} = -M_{00},\ M_{03} = M_{02} = 0, \tag{26}$$

も得られる．以上より，$ds' = 0$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
ds'^2 =& M_{00}c^2dt^2 + M_{0j}cdtdx^j + M_{i0}dx^icdt + M_{ij}dx^idx^j && (27)\\
=& M_{00}\delta_{ij}dx^idx^j + M_{ij}dx^idx^j && (28)\\
=& M_{00}\delta_{ij}dx^idx^j + M_{ij}\delta_{ij}dx^idx^j + M_{ij}(1-\delta_{ij})dx^idx^j && (29)\\
=& M_{00}\delta_{ij}dx^idx^j - M_{00}\delta_{ij}dx^idx^j + M_{ij}(1-\delta_{ij})dx^idx^j && (30)\\
=& M_{ij}(1-\delta_{ij})dx^idx^j && (31)
\end{aligned}
$$

より，

$$M_{ij}(1-\delta_{ij})dx^idx^j = 0 \tag{32}$$

が任意の $dx^i$, $dx^j$ に対して成り立たねばならない．これは，

$$M_{ij} = 0 \qquad (i \neq j), \tag{33}$$

であることを意味する．以上より，行列 $M_{ij}$ は，

$$M_{ij} = \mathrm{diag}(M_{00}, -M_{00}, -M_{00}, -M_{00}) \tag{34}$$

と表されることが分かった．したがって，

$$ds'^2 = M_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -M_{00}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -M_{00}ds^2 \tag{35}$$

が成り立つことになる．

さてここで，慣性系間の関係を結ぶのは速度 $\boldsymbol{v}$ のみであるので，

$$\phi(\boldsymbol{v}) \equiv -M_{00} \tag{36}$$

と置くことができる．つまり，

$$ds'^2 = \phi(\boldsymbol{v})ds^2 \tag{37}$$

と表すことができる．実は慣性系 $K$ と $K'$ のとり方によらず，$\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ となることが次のように示せる．

まず最初に，$\phi(\boldsymbol{v}) = \phi(\|\boldsymbol{v}\|)$ であること，すなわち $\phi$ が $\boldsymbol{v}$ の運動方向によらず，その大きさ $v \equiv \|\boldsymbol{v}\|$ のみの関数であることを示す．いま，慣性系 $K'$ 系の慣性系 $K$ 系に対する運動方向は必ずしも $K$ 系の $x$ 軸方向とは限らないが，話を簡単にするために，$K$ 系と $K'$ 系に新たな座標軸をとって，それぞれ $(ct, X, Y, Z)$ 及び $(ct', X', Y', Z')$ としよう．そしてこのとき $K'$ 系の $K$ 系に対する運動方向を $X$ 軸方向としよう．このとき，例えばある棒をその中点が $Y = 0$ となるように $Y$ 軸に横たえるとき，棒の両端のラベルをそれぞれ $a$ と $b$ とする．このとき，$K$ 系においてこの棒の長さの 2 乗は有限の世界間隔 $s_{ab}$ の 2 乗になる．というのも，棒の長さの 2 乗は,

$$(y_b - y_a)^2 \tag{38}$$

であり，点 $a$ と点 $b$ で同時に起こる 2 つの事象をそれぞれ $A$，$B$ とすれば,この事象 $A$ と $B$ の世界間隔は,

$$s_{AB}^2 = -c^2(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2 \tag{39}$$

であるが，いま，事象 $A$ と事象 $B$ は $K$ 系において同時に起こるのだから，$t_A = t_B$，また $K$ 系から見て $Y$ 軸上に棒が置いてあるのだから,$x_A = x_B = 0$, $Z_A = Z_B = 0$, $Y_A = Y_a$, $Y_B = Y_b$ である．したがって,

$$s_{AB}^2 = (y_B - y_A)^2 = (y_b - y_a)^2 = K \text{ 系から見た棒の長さ} \tag{40}$$

が成り立つことがわかる．

次にこの棒を $K'$ 系から眺めてみよう．$K'$ 系から見ても，この棒は $X'$ 軸方向にしか運動しない．$ct' = X' = Y' = Z' = 0$ の瞬間に光の球面波を放出したものとする．棒の両端の座標は $Y_a = -Y_b$ となり，$Y$ 軸原点から対称かつ $X_a(\boldsymbol{v}) = X_b(\boldsymbol{v})$, $Z_a(\boldsymbol{v}) = Z_b(\boldsymbol{v})$ なので，空間の対称性より，この光は $K'$ 系で同時刻に棒の両端に光の球面波の表面が到達する．このことより，棒の両端の事象をそれぞれ $A'$，$B'$ とすれば，事象 $A'$，$B'$ は同時に起

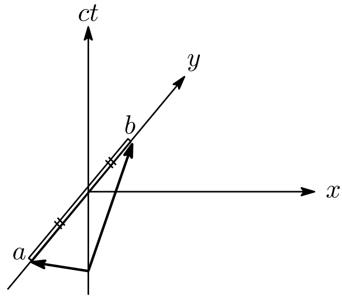


図 1: $Y$ 軸上に棒を設置

こるため，有限の世界間隔の 2 乗 $s'_{AB}$ は，$X'_B = X'_A$, $Z'_B = Z'_A$ より，

$$
\begin{aligned}
&{s'}^2_{AB} \\
=& - c^2({t'}_B - {t'}_A)^2 + ({X'}_B - {X'}_A)^2 + ({Y'}_B - {Y'}_A)^2 + ({Z'}_B - {Z'}_A)^2 \\
=&({Y'}_B - {Y'}_A)^2
\end{aligned}
$$

と表されることが分かる．結局，これは $K'$ 系での棒の長さに等しいことになる (図 1).

これより，既に得られた世界間隔の公式

$$
d{s'}^2 = \phi(\boldsymbol{v}) ds^2 \tag{41}
$$

の有限の世界間隔に適用した場合の公式,

$$
\Delta {s'}^2 = \phi(\boldsymbol{v}) \Delta s^2 \tag{42}
$$

を用いると,

$$
\begin{aligned}
(K \text{ 系での棒の長さ})^2 =&(y_b - y_a)^2 \\
=&s^2_{AB} \\
=&\phi(\boldsymbol{v}){s'}^2_{AB} \\
=&\phi(\boldsymbol{v})({Y'}_B - {Y'}_A)^2 \\
=&\phi(\boldsymbol{v})(K' \text{系での棒の長さ})^2
\end{aligned}
$$

が成り立たねばならない．ここで，棒は $K'$ 系の $K$ 系に対する運動方向に直交するようにとっただけなので，空間の等方性より，運動方向 $\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ によらないからである．したがって，以後，$v \equiv \|\boldsymbol{v}\|$ と置いて，

$$ds'^2 = \phi(v) ds^2 \tag{43}$$

としてよい．

次に，$\phi(v) = 1$ を示す．まず，運動方向の選び方によって式 (43) は影響を受けないので簡単に，慣性系 $K$ とそれに対して $x$ 軸正の方向に速度 $v$ で運動する $K'$ 系をとり，さらに $K'$ 系に対して，$x'$ 軸の負の方向に速度 $-v$ で運動する $K''$ 系を用意する．いま，それぞれの原点をそろえ，軸の向きも全て同じ向きに選んでいるとすれば，$K''$ 系は明らかに $K$ 系に等しいことが分かる．すると次の関係が成り立つことになる:

$$ds'^2 = \phi(v) ds^2, \tag{44}$$

$$ds''^2 = \phi(-v) ds'^2 = \phi(v) ds'^2 \tag{45}$$

これより，

$$ds''^2 = \phi(v) ds'^2 = [\phi(v)]^2 ds^2 \tag{46}$$

いま，$ds''^2 = ds^2$ だったから，明らかに $[\phi(v)]^2 = 1$ でなければならない．さらに，$ds$ と $ds'$ の符号は等しくないと，観測者によって時間的・空間的・光的が変わってしまうので符号は正でなければならない．こうして我々は $\phi(v) = 1$ すなわち，任意の慣性系同士の世界間隔について，

$$ds'^2 = ds^2 \tag{47}$$

が成り立つことを得た．