一般のローレンツ変換の導出

通常，ローレンツ変換といえば，静止系とその x 軸方向に速度 v で運動する系との間の変換として計算される座標変換を表し，それはアインシュタインの 1905 年の論文で導出されているものである．そして一般相対論においては，任意のローレンツ変換で 4 次元不変間隔 ds^2 が保存される（変化しない）ことが重要な事実として用いられ，議論が展開されてゆく．しかし，多くの相対論の教科書では，その一般のローレンツ変換で 4 次元不変間隔 ds^2 が保存することを事実として記すだけで一般的な場合の証明それ自体については記されていないことが多い．その理由はそもそもそのような教科書では一般的なローレンツ変換自体を導出していないことが原因であると考えられる．そこでこの項では一般的なローレンツ変換を表しているポアンカレ変換を導出する．

ポアンカレ変換の導出

二つの任意の慣性系を K 系と $\overline{K}$ 系とし，光速度不変の原理を仮定したときにこの二つの慣性系間の座標変換がどのように表されるかを導こう．この座標変換を一般にポアンカレ変換と呼ぶ．K 系で $(t,\ \boldsymbol{r})$ の時空上の点を $\overline{K}$ 系で見た場合の座標を $(\bar{t},\ \bar{\boldsymbol{r}})$ と表すことにすると，今，慣性系 K の 2 点 $P(t_0,\ \boldsymbol{r}_0)$ と $Q(t_1,\ \boldsymbol{r}_1)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta \boldsymbol{r})^2, \qquad (1)\\
&\Delta t = t_1 - t_0,\ \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,\\
&(\text{但し，}\boldsymbol{x}\text{が縦ベクトルのとき }(\boldsymbol{x})^2 \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\text{とする．})
\end{aligned}
$$

と置くと，慣性系 K の点 $P(t_0,\ \boldsymbol{r}_0)$ から発射された光の球面波が点 $Q(t_1,\ \boldsymbol{r}_1)$ にたどり着くとき，

$$
\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta \boldsymbol{r})^2 = -c^2\Delta t^2 + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\Delta t\right)^2 = -c^2\Delta t^2 + \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)^2\Delta t^2 = -c^2\Delta t^2 + c^2\Delta t^2 = 0
$$

より，$\Delta s^2 = 0$ を満たす．この光の球面波の伝播は光速度不変の原理と相対性原理より，$\overline{K}$ 系においても同じことが成り立つ．即ち，

$$
\begin{aligned}
&\Delta \bar{s}^2 = -(c\Delta \bar{t})^2 + (\Delta \bar{\boldsymbol{r}})^2 = 0, \qquad (2)\\
&\Delta \bar{t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_0,\ \Delta \bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}_1 - \bar{\boldsymbol{r}}_0,
\end{aligned}
$$

が成り立つことになる．ここで $\overline{P}(\bar{t}_0,\ \bar{\boldsymbol{r}}_0)$ 及び $\overline{Q}(\bar{t}_1,\ \bar{\boldsymbol{r}}_1)$ は，$\overline{K}$ 系から見た K 系の 2 点，$P(t_0,\ \boldsymbol{r}_0)$ 及び $Q(t_1,\ \boldsymbol{r}_1)$ を表す．この条件を用いて K 系から $\overline{K}$ 系への座標変換を考えよう．

今，我々の考える座標変換は 1 次式，即ち線形変換であると仮定してよい．つまり，

$$
\begin{aligned}
c\bar{t} &= act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r} + \alpha, \qquad (3)\\
\bar{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r} + \boldsymbol{h}, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

のように表されているとしてよい．ここで a, α は定数，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{h}$ は 3 行の定ベクトル，G は 3 次の定行列を表す．また，$\cdot$ は内積を表し，行列と縦ベクトルの積はそのまま行列演算を表すものとする．ここで何故 1 次式で表されると仮定できるのかというと，例えば仮に t^2 の項が (3) 式の右辺に現れるとすると，(2) 式に (3)，(4) を代入して得られる式と $\Delta s^2 = 0$ を比較することにより，t^2 の項の係数は自動的に 0 になってしまうからである．この式 (3)，(4) はさらに，

$$
\begin{aligned}
c\bar{t}^* &\overset{\text{def}}{=} c\bar{t} - \alpha = act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r},\\
\bar{\boldsymbol{r}}^* &\overset{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r},
\end{aligned}
$$

と置くことによりたやすく，

$$
\begin{aligned}
c\bar{t}^* &= act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r},\\
\bar{\boldsymbol{r}}^* &= \boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r},
\end{aligned}
$$

の形にすることができる．これは $\overline{K}$ 系の時空の原点の取り方をそれぞれの軸を並進させて変えたことに他ならない．このようにしても，原点が異なることを除けば同じ慣性系，即ち $\overline{K}$ であることには変わりはない．そこで簡単のため，以後 $*$ を省いて，

$$c\bar{t} = act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{5}$$
$$\overline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r}, \tag{6}$$

と表すことにする．

ここで (6) 式において，$\boldsymbol{f}$ は K 系と $\overline{K}$ の相対速度に関係する量である．実際，$\overline{K}$ 系に対して静止 ($\overline{\boldsymbol{r}} = const.$) している観測者に対して，

$$\boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r} = const.$$

だからこの両辺を t で微分して，

$$\boldsymbol{f}c + G\dot{\boldsymbol{r}} = 0$$

を得る．ここで $\boldsymbol{r}$ は K 系からみた $\overline{K}$ 系の静止している観測者の空間座標だから $\dot{\boldsymbol{r}}$ は静止系 K と慣性系 $\overline{K}$ の相対速度を表し，それは一定の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ として表せるはずである．そこで，$\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c$ と置くと，$\boldsymbol{f}c + G\boldsymbol{v} = 0$ より，

$$\boldsymbol{f} = -G\boldsymbol{\beta} \tag{7}$$

と表せることになる．従ってこれを用いると，(6) 式は，

$$\bar{r} = G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta}ct) \tag{8}$$

と表されることになる．そこで変換式 (5)，(8) を $\Delta\bar{s}^2 = 0$ の定義式 (2) に代入しよう．まず，

$$\begin{aligned} c\Delta\bar{t} &= c(\bar{t}_1 - \bar{t}_0) = ac(t_1 - t_0) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) = ac\Delta t + \boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{r}, \\ \Delta\overline{\boldsymbol{r}} &= \overline{\boldsymbol{r}}_1 - \overline{\boldsymbol{r}}_2 = G[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) - \boldsymbol{\beta}c(t_1 - t_0)] = G(\Delta\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta}c\Delta t) \end{aligned}$$

だからこれを (2) に代入すると，

$$\begin{aligned} \Delta\bar{s}^2 &= -(c\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\overline{\boldsymbol{r}})^2 \\ &= -(ac\Delta t + \boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + [G(\Delta\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\beta}c\Delta t)]^2 \\ &= -(ac\Delta t)^2 - 2ac\Delta t(\boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + (G\Delta\boldsymbol{r} - G\boldsymbol{\beta}c\Delta t)\cdot(G\Delta\boldsymbol{r} - G\boldsymbol{\beta}c\Delta t) \\ &= -(ac\Delta t)^2 - 2(a\boldsymbol{b})\cdot(c\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + (G\Delta\boldsymbol{r})\cdot(G\Delta\boldsymbol{r}) - 2(G\boldsymbol{\beta}c\Delta t)\cdot(G\Delta\boldsymbol{r}) + (G\boldsymbol{\beta}c\Delta t)\cdot(G\boldsymbol{\beta}c\Delta t) \\ &= -a^2(c\Delta t)^2 - 2(a\boldsymbol{b})\cdot(c\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) - {}^t\Delta\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b}\Delta\boldsymbol{r} + {}^t\Delta\boldsymbol{r}{}^tGG\Delta\boldsymbol{r} - 2({}^tGG\boldsymbol{\beta})\cdot(c\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) + (G\boldsymbol{\beta})^2(c\Delta t)^2 \\ &= -[a^2 - (G\boldsymbol{\beta})^2](c\Delta t)^2 - 2(a\boldsymbol{b} + {}^tGG\boldsymbol{\beta})\cdot(c\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) + {}^t\Delta\boldsymbol{r}({}^tGG - \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b})\Delta\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

つまり，

$$\Delta\bar{s}^2 = -[a^2 - (G\boldsymbol{\beta})^2](c\Delta t)^2 - 2(a\boldsymbol{b} + {}^tGG\boldsymbol{\beta})\cdot(c\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) + {}^t\Delta\boldsymbol{r}({}^tGG - \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b})\Delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{9}$$

一方，

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta\boldsymbol{r})^2 = 0, \tag{10}$$
$$\Leftrightarrow \text{任意の } k \neq 0 \text{ に対して，} k\Delta s^2 = -k(c\Delta t)^2 + k(\Delta\boldsymbol{r})^2 = 0,$$
$$\Leftrightarrow \text{任意の } k \neq 0 \text{ に対して，} k\Delta s^2 = -k(c\Delta t)^2 + \boldsymbol{0}\cdot(\Delta t\Delta\boldsymbol{r}) + {}^t\Delta\boldsymbol{r}(kE_3)\Delta\boldsymbol{r} = 0, \tag{11}$$

である (E_3 は 3 次の単位行列)．従って，光速度不変の原理より (9) が成り立つことと (10) が成り立つことは同値であるから，それぞれが Δt, Δx, Δy, Δz の 4 変数の 2 次式であることより，(9) 式は (11) 式のように定比例の関係でなくてはならない．従って，

$$a\boldsymbol{b} + {}^tGG\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$
$$kE_3 = {}^tGG - \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b} = [a^2 - (G\boldsymbol{\beta})^2]E_3, \tag{13}$$

が成り立たなくてはならない．

(12) 式の両辺に右から $\boldsymbol{\beta}$ をかけて内積をとると，

$$
\begin{aligned}
&a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta}+({}^tGG\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\beta}=0,\\
\therefore\quad &{}^t\boldsymbol{\beta}{}^tGG\boldsymbol{\beta}=-a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta},\\
\therefore\quad &(G\boldsymbol{\beta})^2=-a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

よって，この (14) 式を (13) 式に代入して両辺に右から $\boldsymbol{\beta}$ をかけると，

$$
\begin{aligned}
&{}^tGG\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}=[a^2+a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta}]\boldsymbol{\beta},\\
\therefore\quad &-a\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})+a^2\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})(a\boldsymbol{\beta}),\\
\therefore\quad &a\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{b}+a^2\boldsymbol{\beta}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})(a\boldsymbol{\beta})=0,\\
\therefore\quad &(a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{b}+a\boldsymbol{\beta})=0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

が得られる．ここで内積は全て $\cdot$ を使いそれ以外のスカラーやベクトルの積はそのまま順番どおりに並べて表記してあることに注意が必要だろう．ここで (5), (8) より，

$$
\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & {}^t\boldsymbol{b} \\ -G\boldsymbol{\beta} & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}
\tag{16}
$$

が得られるが，この変換の逆変換があることより，

$$
\det\begin{bmatrix} a & {}^t\boldsymbol{b} \\ -G\boldsymbol{\beta} & G \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a+{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta} & {}^t\boldsymbol{b} \\ 0 & G \end{bmatrix}=\det\Big[G\Big]\det\Big[a+{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}\Big]=\det\Big[G\Big]\,(a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})\neq 0
\tag{17}
$$

であるから，G は正則行列で逆行列を持ち，$a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta}\neq 0$ である．従って，$\boldsymbol{b}+a\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ であるから，

$$
\boldsymbol{b}=-a\boldsymbol{\beta}
\tag{18}
$$

なので，(13) 式に (14) 式とともにこの式を代入すると，

$$
{}^tGG=(-a\boldsymbol{\beta})^t(-a\boldsymbol{\beta})+(a^2+a\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\beta})E_3=a^2\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}+(a^2-a^2\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})E_3=a^2\left[(1-\boldsymbol{\beta}^2)E_3+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right]
\tag{19}
$$

が得られる．ここで (19) 式の右辺の行列 ($\equiv M$) の固有値を求めよう．今，

$$
M=a^2L
$$

とすると，

$$
L\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}\Leftrightarrow M\boldsymbol{x}=a^2L\boldsymbol{x}=a^2\alpha\boldsymbol{x}
$$

より，

$$
\alpha\text{が } L \text{ の固有値}\Leftrightarrow a^2\alpha\text{が } M \text{ の固有値}
$$

である．そこで，

$$
L\equiv(1-\boldsymbol{\beta}^2)E_3+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}
$$

の固有値を求め，それらを a^2 倍すれば M の固有値が得られることになる．計算を簡単にするために，$\alpha\equiv 1-\boldsymbol{\beta}^2$ と置くと固有方程式は，

$$
\det[L-\lambda E_3]=\det\begin{bmatrix} \dot{x}^2+\alpha-\lambda & \dot{x}\dot{y} & \dot{x}\dot{z} \\ \dot{y}\dot{x} & \dot{y}^2+\alpha-\lambda & \dot{y}\dot{z} \\ \dot{z}\dot{x} & \dot{z}\dot{y} & \dot{z}^2+\alpha-\lambda \end{bmatrix}=0
\tag{20}
$$

となる．この式をサラスの方法によって展開すると，

$$
\begin{aligned}
\det[L-\lambda E_3] &= \det\begin{bmatrix} \dot{x}^2+\alpha-\lambda & \dot{x}\dot{y} & \dot{x}\dot{z} \\ \dot{y}\dot{x} & \dot{y}^2+\alpha-\lambda & \dot{y}\dot{z} \\ \dot{z}\dot{x} & \dot{z}\dot{y} & \dot{z}^2+\alpha-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (\dot{x}^2+\alpha-\lambda)(\dot{y}^2+\alpha-\lambda)(\dot{z}^2+\alpha-\lambda)+(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2+(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2 \\
&\qquad -(\dot{x}\dot{y})^2(\dot{z}^2+\alpha-\lambda)-(\dot{y}\dot{z})^2(\dot{x}^2+\alpha-\lambda)-(\dot{z}\dot{x})^2(\dot{y}^2+\alpha-\lambda) \\
&= \cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}+\cancelto{1}{(\dot{x}\dot{y})^2(\alpha-\lambda)}+\cancelto{2}{(\dot{y}\dot{z})^2(\alpha-\lambda)}+\cancelto{3}{(\dot{z}\dot{x})^2(\alpha-\lambda)}+(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\alpha-\lambda)^2+(\alpha-\lambda)^3 \\
&\qquad +\cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}+\cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}-\cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}-\cancelto{1}{(\dot{x}\dot{y})^2(\alpha-\lambda)}-\cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}-\cancelto{2}{(\dot{y}\dot{z})^2(\alpha-\lambda)}-\cancel{(\dot{x}\dot{y}\dot{z})^2}-\cancelto{3}{(\dot{z}\dot{x})^2(\alpha-\lambda)} \\
&= (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\alpha-\lambda)^2+(\alpha-\lambda)^3 \\
&= (\alpha-\lambda)^2[\alpha-\lambda+\boldsymbol{\beta}^2] \\
&= (\alpha-\lambda)^2[1-\boldsymbol{\beta}^2-\lambda+\boldsymbol{\beta}^2] \\
&= (\alpha-\lambda)^2[1-\lambda] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より，M の固有値は a^2, $a^2(1-\boldsymbol{\beta}^2)$(重解) となることが分かる．但し，$\boldsymbol{\beta}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$ を用いた．ここで G は正則だったから，${}^tGG$ は正則な対称行列である．従って固有値は全て正でなければならない．これより，$a\neq 0$ かつ $\boldsymbol{\beta}^2<1$ でなくてはならない．これは慣性系同士の相対速度が常に光速度未満であることを示している．

さて，G を求めるために，

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} \tag{21}$$

と置くことにすると，

$$a = k\gamma \tag{22}$$

となる k を用いて，

$${}^tGG = {}^t\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right] \tag{23}$$

と表すことができる．実際，

$$
\begin{aligned}
{}^t\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right)\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right) &= \left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right)\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right) \\
&= E_3+\frac{2\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}+\left(\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\right)^2\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \\
&= E_3+\frac{2\gamma^2(1+\gamma)}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}+\frac{\gamma^4}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^2)^t\boldsymbol{\beta} \\
&= E_3+\frac{2\gamma^2(1+\gamma)}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}+\frac{\gamma^4}{(1+\gamma)^2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \\
&= E_3+\frac{2\gamma^2+2\gamma^3+\gamma^4-\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \\
&= E_3+\frac{\gamma^2(\gamma^2+2\gamma^{+}1)}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \\
&= E_3+\gamma^2\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

だから，(19) 式より，

$${}^tGG = a^2\left[(1-\boldsymbol{\beta}^2)E_3+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}\right] = k^2\gamma^2[\frac{1}{\gamma^2}E_3+\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}] = k^2[E_3+\gamma^2\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta}]$$

だから (23) 式が得られる．これより一般に直交行列 H に対して ${}^tHH=E_3$ であることを用いて，

$$
\begin{aligned}
{}^tGG &= {}^t\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right] \\
&= {}^t\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]E_3\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right] \\
&= {}^t\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]{}^tHH\left[k\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right] \\
&= {}^t\left[kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]\left[kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\right]
\end{aligned}
$$

が得られるので，G は一般に，ある適当な直交行列 H を用いて，

$$
G = kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \tag{24}
$$

と表されることになる．これらをまとめると，(16)，(18), (21)，(22)，(24) より，

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & {}^t\boldsymbol{b} \\ -G\boldsymbol{\beta} & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}, \\
&\boldsymbol{b} = -a\boldsymbol{\beta}, \\
&\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}}, \\
&a = k\gamma, \\
&G = kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & {}^t\boldsymbol{b} \\ -G\boldsymbol{\beta} & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k\gamma & -k\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\beta} & kH\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -H\left(\boldsymbol{\beta}+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}\right) & H\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -H\left(\boldsymbol{\beta}+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\boldsymbol{\beta}\right) & H\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma H\boldsymbol{\beta} & H\left(E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得られる．以上より，この変換は,

$$
\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma{}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}
$$

と表せることが分かった．ここで k は適当な定数，H は適当な直交行列，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}$ である．

さて，ここで k は定数といったが，実はこれは慣性系の相対速度が一定であることから言えることであり，一般には相対速度 $\boldsymbol{v}$ の関数である．一方，空間の等方位性より k は位置の関数にはなっていないとしてよい．従って，$k = k(\boldsymbol{v})$ である．実は，k は K から $\overline{K}$ の変換の逆変換を考えることにより，$k(\boldsymbol{v}) = 1$ となることが示される．今，K に対して相対速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する座標系 $\overline{K}$ を考える．座標軸を回転することにより，$H = E_3$ となるようにとることができる．このとき，

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = k(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{25}$$

が成り立っている．一方，K に対する $\overline{K}$ の相対速度が $\boldsymbol{v}$ なら，$\overline{K}$ に対する K の相対速度は $-\boldsymbol{v}$ だから，

$$\begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} = k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma & \gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} \tag{26}$$

従って K から K への恒等変換 E_4 は次の形で表すことができる:

$$\begin{aligned}
E_4 &= k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma & \gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} k(\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^{2\,t}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta} & -\gamma^{2\,t}\boldsymbol{\beta} + \gamma\left({}^t\boldsymbol{\beta} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}{}^t\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right) \\ \gamma^2\boldsymbol{\beta} - \gamma\left(\boldsymbol{\beta} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}\right) & -\gamma^2\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} + \left(E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\boldsymbol{\beta}^2 & -\gamma^{2\,t}\boldsymbol{\beta} + \gamma\left({}^t\boldsymbol{\beta} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^{2\,t}\boldsymbol{\beta}\right) \\ \gamma^2\boldsymbol{\beta} - \gamma\left(\boldsymbol{\beta} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^2\right) & -\gamma^2\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} + E_3 + \dfrac{2\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} + \left(\dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\right)^2 \boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2} & \left(-\gamma + 1 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ \left(\gamma - 1 - \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \left[-\gamma^2 + \dfrac{2\gamma^2}{1+\gamma} + \dfrac{\gamma^4}{(1+\gamma)^2}\boldsymbol{\beta}^2\right]\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \times {}^t\boldsymbol{\beta} \\ 0 \times \gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \left[-\gamma^2 + \dfrac{2\gamma^2}{1+\gamma} + \dfrac{\gamma^4}{(1+\gamma)^2}\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right]\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & E_3 + \left[-\gamma^2 + \dfrac{2\gamma^2}{1+\gamma} + \dfrac{\gamma^2(\gamma-1)}{1+\gamma}\right]\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & E_3 \end{pmatrix} \\
&= k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v})E_4
\end{aligned}$$

以上より結局,

$$k(\boldsymbol{v})k(-\boldsymbol{v}) = 1 \tag{27}$$

が成り立つことになる．しかしここで，空間の等方位性より，k は $\boldsymbol{v}$ の大きさだけの関数としてよいので，$k(\boldsymbol{v})^2 = 1$ である．さらに $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}$ の極限を考えると，恒等変換になってなくてはならないから，$k(\boldsymbol{0}) = 1$ である．従って，連続性を考えると任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $k(\boldsymbol{v}) = 1$ でなくてはならないことが分かる．以上より，慣性系 $(ct, \boldsymbol{r})$ からそれに対し速度 $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$ で運動する慣性系 $(c\bar{t}, \bar{\boldsymbol{r}})$ への座標変換は，一般的に軸の回転を表す適当な直交行列 H を用いて,

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix} \tag{28}$$

と表されることが示された．この座標変換をポアンカレ (Poincarè) 変換，または非同次ローレンツ変換と呼ぶ.

ポアンカレ変換から特殊ローレンツ変換を導く

さて，このようにして得られたポアンカレ変換が通常の意味での特殊なローレンツ変換の一般化になっていることは簡単に示せる．まず最初に，K 系に対して $\overline{K}$ 系が運動する速度ベクトルに平行に K 系の x 軸をとる．このとき $\overline{K}$ 系の座標軸を回転し K 系の座標軸と同じ向きになるようにとろう．すると $H = E_3$ となる．さらに K 系の $t = x = y = z = 0$ の時空上の点が $\overline{K}$ 系の $\bar{t} = \overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$ の点と一致するように $\overline{K}$ 系の各軸を並進させよう．このように設定すると，ポアンカレ変換の式において，

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \alpha = 0,\ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0},\ H = E_3$$

が成り立つから，ポアンカレ変換は，

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \overline{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{29}$$

となる．ここで,

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 1 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

であるから，結局,

$$\begin{aligned} c\bar{t} &= \gamma(ct - \beta x), \\ \overline{x} &= \gamma(x - vt), \\ \overline{y} &= y, \\ \overline{z} &= z, \end{aligned}$$

となり，確かに通常のローレンツ変換が導ける．

ポアンカレ変換で4次元不変間隔が保存されることの証明

前項の結果を用い，ポアンカレ変換で4次元不変間隔が保存されることを示そう．まずポアンカレ変換は次の形をしているのであった:

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix}$$

但し，

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

と置いた．これを展開すると，

$$\begin{aligned} c\bar{t} &= \gamma\left(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}\right) + \alpha, \\ \bar{\boldsymbol{r}} &= H\left[\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{v}t\right] + \boldsymbol{h}, \end{aligned}$$

となるから，これより，

$$\begin{aligned} c\Delta\bar{t} &= \gamma\left(c\Delta t - \boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\right), \\ \Delta\bar{\boldsymbol{r}} &= H\left[\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right], \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned} \Delta\bar{s} &= -(c\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{\boldsymbol{r}})^2 \\ &= -\left[\gamma\left(c\Delta t - \boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\right)\right]^2 + \left\{H\left[\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right]\right\}^2 \\ &= -\gamma^2(c\Delta t)^2 + 2\gamma^2 c\Delta t(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}) - \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 \\ &\quad + {}^t\left[\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right]{}^tHH\left[\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right] \\ &= -\gamma^2(c\Delta t)^2 + 2\gamma^2 c\Delta t(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}) - \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + \left[{}^t\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}){}^t\boldsymbol{\beta} - \gamma{}^t\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right]\left[\Delta\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t\right] \\ &= -\gamma^2(c\Delta t)^2 + 2\gamma^2 c\Delta t(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r}) - \gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + (\Delta\boldsymbol{r})^2 + \left[\frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\right]^2\boldsymbol{\beta}^2 + (\gamma\boldsymbol{\beta}c\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{2\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 - \frac{2\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta}^2\gamma c\Delta t - 2\gamma(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})c\Delta t \\ &= (\boldsymbol{\beta}^2 - 1)\gamma^2(c\Delta t)^2 + \left(\gamma - \frac{\gamma^2\boldsymbol{\beta}^2}{1+\gamma} - 1\right)2\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})c\Delta t + \left[-\gamma^2 + \left(\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\right)^2\boldsymbol{\beta}^2 + \frac{2\gamma^2}{1+\gamma}\right]^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + (\Delta\boldsymbol{r})^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\gamma^2(c\Delta t)^2 + \left[\gamma - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) - 1\right]2\gamma^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})c\Delta t \\ &\quad + \left[-\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{(1+\gamma)^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{2\gamma^2}{1+\gamma}\right]^2(\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{r})^2 + (\Delta\boldsymbol{r})^2 \\ &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta\boldsymbol{r})^2 \\ &= \Delta s^2 \end{aligned}$$

以上より，$\Delta s^2 = \Delta\bar{s}^2$ が示された．

$\Delta s^2 = \Delta\bar{s}^2$ の別解

次に同じことを別の方法で示す．ポアンカレ変換の式 (28) より，

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}_1 \\ \bar{\boldsymbol{r}}_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c\bar{t}_0 \\ \bar{\boldsymbol{r}}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \left[\begin{pmatrix} ct_1 \\ \boldsymbol{r}_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ct_0 \\ \boldsymbol{r}_A \end{pmatrix} \right]$$

但し，

$$\Phi(\boldsymbol{\beta}) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma {}^t\boldsymbol{\beta} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & E_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\boldsymbol{\beta}{}^t\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

と置いた．これより，

$$\begin{pmatrix} c\Delta\bar{t} \\ \Delta\bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{32}$$

つまり，K 系で Δt の間に $\Delta\boldsymbol{r}$ 進んだ場合，$\overline{K}$ 系で $\Delta\bar{t}$ の間に $\Delta\bar{\boldsymbol{r}}$ とした．このとき，K 系に対して $\overline{K}$ 系とは逆向きに同じ大きさの速度で運動する系を $\overline{\overline{K}}$ 系とすると，空間の反転対称性より，$\Delta\bar{\bar{t}} = \Delta\bar{t}$ の間に，$-\Delta\bar{\bar{\boldsymbol{r}}} = -\Delta\bar{\boldsymbol{r}}$ 移動するから[1]，

$$\begin{pmatrix} c\Delta\bar{t} \\ -\Delta\bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ -\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{33}$$

(33) 式の転置行列を取ると，${}^t\Phi = \Phi$ だから，

$$\begin{pmatrix} c\Delta\bar{t} & -{}^t\Delta\bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^tH \end{pmatrix} \tag{34}$$

よってこれより，(32) 式の左側から (34) 式の行列を掛けると，

$$\begin{aligned}
-\Delta\bar{s}^2 &= (c\Delta\bar{t})^2 - (\Delta\bar{r})^2 \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta\bar{t} & -{}^t\Delta\bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta\bar{t} \\ \Delta\bar{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^tH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & H \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^tHH \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & E_3 \end{pmatrix} \Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Phi(-\boldsymbol{\beta})\Phi(\boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} E_4 \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\Delta t & -{}^t\Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\
&= (c\Delta t)^2 - (\Delta\boldsymbol{r})^2 \\
&= -\Delta s^2
\end{aligned}$$

よってこれより，$\Delta s^2 = \Delta\bar{s}^2$ が示された．なお，わざわざ逆向きの運動を考えたのは，$\Phi(-\boldsymbol{\beta})\Phi(\boldsymbol{\beta}) = E_4$ となるために必要だからである．・

[1] 簡単に言えば右に進もうが左に進もうが速さが一緒なら時計の遅れもローレンツ収縮の大きさも一緒ということ