マックスウェル方程式の座標変換を考える

相対性理論の基本となる座標変換であるローレンツ変換は，その名のとおりアインシュタイン以前に既にマックスウェル方程式を保存する変換としてローレンツ等により導かれていた．一方，アインシュタインは光速度不変の原理を導入し，マックスウェル方程式を用いることなく，力学における基本的な座標変換としてローレンツ変換を導いた．ここでは，次の二つを示すことによって，このアインシュタインの光速度不変の原理が電磁気学の観点からみて妥当であることを示したい．

1. マックスウェル方程式から得られる電磁波の波動方程式はガリレイ変換で保存しないこと．従って，ガリレイ変換が慣性系同士の変換として物理的に正しいのであれば，絶対静止エーテルが存在すること．

2. マックスウェル方程式から得られる電磁波の波動方程式はローレンツ変換で保存すること．これはつまり電磁気学の法則には絶対静止系など存在しないことを示唆する．

マックスウェル方程式

マックスウェル方程式は次の 4 つのベクトル場に関する方程式である:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i}, \tag{4}$$

ここでナブラ (∇) は，

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

を表し，"$\cdot$"は内積，"$\times$"は外積 (ベクトル積) を表す．また $\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場を表す．ここで明らかであろうが，一般に $\rho = \rho(x,\ y,\ z)$，$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}(x,\ y,\ z)$ のように空間の各点でこれらの方程式が成り立っていることに注意しよう．またここで，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

が成り立っている．ε は誘電率といい絶縁体の種類により異なる値を持つ．また，μ は通磁率といい磁性体の種類により異なる値となる．

さてここでこれらの方程式は一般に誘電体や磁性体などの物質がある場合にも成り立つ関係式であるが，絶対静止エーテルがもし存在するのであれば，　電磁波が真空中を伝わることから考えて，真空の宇宙空間に対して，絶対静止系がとれるはずである．そこで話を簡単にするために以後，真空中の電磁場を考えて，真空中を電磁波が伝わる様子を座標変換によって表し，それによってどのようなことがいえるのかを議論しよう．

真空中のマックスウェル方程式と電磁波の波動方程式

真空中では，電荷の湧き出しや電流はないから，$\rho = 0$，$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$ が成り立っている．また，真空の誘電率や通磁率はそれぞれ ε_0，μ_0 だから，(5)，(6) 式はそれぞれ，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}, \tag{8}$$

と表される．ここで (5)，(6) 式と (7)，(8) 式では単に誘電率と通磁率に 0 がついただけのように見えるが，(7)，(8) 式においては，誘電率も通磁率も単なる定数となっており，真空がこの意味で一様であることを表している．

(3)，(7) より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho = 0,$$
$$\therefore \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{9}$$

また，(4)，(7)，(8)，より，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \right) - \frac{\partial (\varepsilon_0 \boldsymbol{E})}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0},$$
$$\therefore \quad \nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

が得られるので，まとめると真空中でのマックスウェル方程式は,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{11}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{12}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{13}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{14}$$

となることが分かった．この一連の方程式より，たやすく真空中を伝わる電磁波の波動方程式が得られる: $\nabla \times$(12) 式より，まず初項は,

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

となる[1]．続いて 2 項目は,

$$\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

となるので，結局 (12) 式は,

$$\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

と表されることになる．これ

[1] この証明はこの記事の末尾に付録として付けた

付録

$\nabla \times (\nabla \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ の証明

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \right) \times (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \\
&= \quad \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z \\
&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z \\
&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

となるが，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}, \\
&\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_z, \\
&\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = -\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x, \\
&\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y,
\end{aligned}
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \right) \times (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial A_x}{\partial z} \times \boldsymbol{e}_y - \frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_x, \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}
$$

が得られるので，$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$ は，

$$
\boldsymbol{M} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{e}_z,
$$

と置くと,

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = & \quad \nabla \times \boldsymbol{M} \\
= & \quad \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \boldsymbol{e}_x \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \boldsymbol{e}_y \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \boldsymbol{e}_x \\
& + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \boldsymbol{e}_y \\
& + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right] \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] \boldsymbol{e}_x \\
& + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right] \boldsymbol{e}_y \\
& + \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \right] \boldsymbol{e}_x \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \right] \boldsymbol{e}_y \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \right] \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 A_x \right] \boldsymbol{e}_x + \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 A_y \right] \boldsymbol{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 A_z \right] \boldsymbol{e}_z, \\
\\
= & \quad \left[\frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{A})}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{A})}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{A})}{\partial z} \boldsymbol{e}_z \right] - \left[\nabla^2 A_x \boldsymbol{e}_x + \nabla^2 A_y \boldsymbol{e}_y + \nabla^2 A_z \boldsymbol{e}_z \right] \\
= & \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{e}_z \right] (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \\
= & \quad \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$