0.1　等長変換としてローレンツ変換を導く

ここでは世界間隔 ds が任意の座標変換で不変であることと，慣性系同士の座標変換が 1 次式になるという結果を用いて．ローレンツ変換を導く．

まず最初に慣性系 K とそれに対して等速直線運動をしている別の慣性系 K' に対して，$(ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ のとき $(ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ であると仮定する．これは言葉で表現するなら $t = t' = 0$ の瞬間に K 系と K' 系の座標原点が一致しているという仮定である．この仮定により 2 つの慣性系に対して，それぞれの世界間隔が等しいことより，同じ事象を 2 つの座標系で見た場合,

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 - {w'}^2 \tag{1}$$

が成りたつ．単なる数式変形であるが，この式は次のように変形することができる:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (iw)^2 = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 + (iw')^2 \tag{2}$$

こうすると，これは 4 次元ユークリッド空間のデカルト座標表示 (iw, x, y, z) の原点からの長さの 2 乗になるので，これは長さを保存する，等長変換であることが分かる．

ここでローレンツ変換を導くために次の仮定をしよう:

- $t = t' = 0$ の時，各 x', y', z' 軸はそれぞれの対応する x, y, z 軸に重なっている．
- K' 系の運動方向は K 系の x 軸正の方向に速度 v で運動しているものとする．

こう仮定するとすぐに，$y' = y$，$z' = z$ がいえるので，次の関係式が成り立つ．

$$x^2 + (iw)^2 = {x'}^2 + (iw')^2 \tag{3}$$

これを満たす座標変換は 1 次式の範囲内においては線型変換，特に長さを保存する線型変換になる．すなわち，実変換の中で考えると，直交変換しかない．いま，条件を満たすようにすると，時間軸 w も x 軸も w' 軸や x' 軸に対して反転してはいけないので，結局これは 2 次元ユークリッド空間における回転で表せることになる．そこでその回転角を θ とすれば，

$$\begin{pmatrix} iw \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw' \\ x' \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表せることになる．これを展開して計算すると，

$$iw = \cos\theta iw' - \sin\theta x', \tag{5}$$

$$x = \sin\theta iw' + \cos\theta x', \tag{6}$$

より，$\varphi \equiv i\theta$ と置けば，

$$w = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} w' - \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i^2} x' = \cosh\varphi w' + \sinh\varphi x', \tag{7}$$

$$x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} iw' + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} x' = \sinh\varphi w' + \cosh\varphi x', \tag{8}$$

が成り立つ．$\varphi \equiv i\theta$ と置いたのがなにやら心配かもしれないが，こう置いたものが，後でつじつまが合えばいいだけなので，φ が実数になるのかどうかいま気に病むのはやめよう．すると，結局，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi w' + \sinh\varphi x' \\ \sinh\varphi w' + \cosh\varphi x' \end{pmatrix} \tag{9}$$

が一般に成り立つわけだが，特にここで K' 系の原点 $x' = 0$ について着目しよう．この点は K 系から見ると，

$$w = \cosh\varphi w', \tag{10}$$

$$x = \sinh\varphi w', \tag{11}$$

のように変換される．したがって，

$$\tanh\varphi = \frac{x}{w} = \frac{x}{ct} = \frac{x}{t}/c \tag{12}$$

が成り立つことになるのであるが，いま，K' 系が K 系に対して速度 v で運動しているということは，$v = x/t$ に等しいことを意味するから，

$$\tanh\varphi = v/c \tag{13}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi =& \left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)^2 \qquad (14)\\ =& \frac{e^{2\varphi}+2+e^{-2\varphi}-\left(e^{2\varphi}-2+e^{-2\varphi}\right)}{4} \qquad (15)\\ =& 1 \qquad (16)\end{aligned}$$

より，

$$1 - \tanh^2\varphi = \frac{1}{\cosh^2\varphi} \tag{17}$$

が得られるので，$\cosh^2\varphi > 0$ を考慮すれば，

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{18}$$

が得られる．よってこれより，

$$\sinh\varphi = \tanh\varphi\cdot\cosh\varphi = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{19}$$

が成り立つ．以上をまとめると，

$$\beta \equiv v/c, \tag{20}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{21}$$

と置けば，ローレンツ変換は，$y' = y$, $z' = z$ に注意して，

$$\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{22}$$

となる．普通の表式はこれを逆に解いて（$y' = y$, $z' = z$ より単純に 2 次の逆行列を計算すれば十分），

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{23}$$

としてもよいが．単純に K 系は K' 系に対して速度 $-v$ で運動するから，式 (22) の $\beta = v/c$ を $-\beta = -v/c$ で置き換えても (23) 式を得る．なお行列を用いない表記では，

$$ct' = w' = \gamma(ct - \beta x), \tag{24}$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \tag{25}$$

$$y' = y, \tag{26}$$

$$z' = z, \tag{27}$$

となる．ただし，

$$\beta = v/c, \tag{28}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{29}$$

であった．