1.1　ローレンツ変換の導出

1.1.1　ローレンツ変換とは

ある慣性系 K 系 (x,y,z,t) と K 系の x 軸正の向きに速度 v で走る系 K' 系 (x',y',z',t') を考える。但し、K' 系の原点は K 系の原点と $t'=t=0$ のとき一致しているものとする。このとき、K' 系の各座標 (x',y',z',t') は K 系の各座標 (x,y,z,t) を用いて、

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta(v)(x-vt)\\
y' &= y\\
z' &= z\\
t' &= \beta(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\\
\text{但し、}\beta(v) &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
\end{aligned}
$$

と座標変換される。これをローレンツ変換と呼ぶ。

1.1.2　必要とする仮定

以下の 3 つの仮定を基本原理として認めることにする。

- **基本原理 0 空間の等方位性**
  空間はどの向きでも一様という仮定
- **基本原理 1　相対性原理**
  相対性原理（慣性系は互いに同等であるという原理）
- **基本原理 2　光速度不変の法則**
  どのような立場でも光の速さは一定という仮定

1.1.3 ローレンツ変換の導出

まず、K 系の空間が一様であることより、相対性原理から K' 系も当然一様になっている。これは即ち、K' 系が K 系の変数を用いて一次式で表されることを示している。よって次の形をしている。

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + a_{25} \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + a_{35} \\
t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + a_{45}
\end{aligned}
$$

まず、上の式で、互いの原点が $t = t' = 0$ でかさなっていることより、$a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = 0$ が成り立つ。次に x' 軸であるが、もし x' 軸が、x 軸と平行でないとすると、y, z 方向に傾いていることになるが、これは空間の等方位性に反する。よって x' 軸は x に平行なので、$a_{12} = a_{13} = 0$ でなければならない。よって、$x' = a_{11}x + a_{14}t$ となるが、今、K' 系の原点は K 系の時刻 t のとき、K 系から見て $x = vt$ の位置にある。これはつまり $\xi = x - vt$ とすると、x' はこの ξ の関数になっていなければならないことを意味する。よって $x' = f(\xi) = f(x - vt)$ でなければならないから、$x' = a_{11}(x - vt)$ が成り立つ。

次に y' であるが、もし z の係数 a_{23} が 0 でないとすると、y' 軸は y 軸に対して z 軸のいずれかの向きに傾いていることになるが、これは空間の等方位性より不自然である。故に $a_{23} = 0$ である。さらに、K 系から見て $(x, y, z) = (x, y, 0)$ の位置のとき、$y'_1 = a_{21}x + a_{22}y$。また、$(x, y, z) = (x, -y, 0)$ の位置のとき $y'_2 = a_{21}x - a_{22}y$ であるが、y と $-y$ は x 軸対称になっているので、K' 系の空間の一様性より、$y'_2 = -y'_1$ でなければならない。よって $a_{21}x = 0$ であるが、今 x は任意だったから、$a_{21} = 0$ でなければならない。以上より、$y' = a_{22}y + a_{24}t$ となるが、これは $a_{24} \neq 0$ のとき、$y' = a_{22}(y + \frac{a_{24}}{a_{22}}t)$ の形となり、これでは y' が y 軸に対して運動をしていることになってしまい、K' 系の運動方向の仮定に反する。よって $a_{24} = 0$ でなければならない。これより、$y' = a_{22}y$ である。全く同様の議論により、$z' = a_{33}z$ も成り立つ。ここで、y 軸、z 軸の取り方は任意だから、$a_{33} = a_{22}$ が成り立つ。結局、以上をまとめると、各係数は速度 v に依存することより v の関数になるから、

$$
\begin{aligned}
x' &= A(v)(x - vt) \\
y' &= B(v)y \\
z' &= B(v)z \\
t' &= D(v)x + E(v)y + F(v)z + G(v)t
\end{aligned}
$$

と表されることが分かる。

ここで、まだ求まっていない $B(v)$ を求めよう。そのために K' 系に対して x' 軸の負の方向に速度 v で走る K'' 系 (x'', y'', z'', t'') を考える。またこの K'' 系の原点は $t' = t'' = 0$ のとき、一致しているものとする。すると K' 系から K'' 系への上の変換によって、

$$
\begin{aligned}
y'' &= B(-v)y' \\
z'' &= B(-v)z'
\end{aligned}
$$

が成り立つ。一方、K 系と K' 系との間には、

$$
\begin{aligned}
y' &= B(v)y \\
z' &= B(v)z
\end{aligned}
$$

の関係があるのだから、結局、

$$
\begin{aligned}
y'' &= B(-v)y' \\
&= B(v)B(-v)y \\
z'' &= B(-v)z' \\
&= B(v)B(-v)z
\end{aligned}
$$

が成り立つことになる。ところが、相対性原理より K 系から速度 v で x 軸の正の方向に進む K' 系から見ると、逆に K 系は速度 v で x' 軸負の向きに移動しているように見える。これはつまり、K'' 系が K 系に一致することに他ならない。よって、

$$
\begin{aligned}
y &= B(v)B(-v)y \\
z &= B(v)B(-v)z
\end{aligned}
$$

より、$B(v)B(-v) = 1$ であるが、空間の等方位性より $B(-v) = B(v)$ でなければならないので、結局 $B(v) = B(-v) = \pm 1$ が成り立つことが分かる。ところがここで y' は $v = 0$ のとき y に一致しなくてはならないから、$\mathrm{y} = B(0)y$ より $B(0) = 1$ であるが、速度 v の値の連続的な変化で、y' の値が不連続にならないためには、どんな v に対しても $B(v) = -1$ あってはならない。よって任意の v で $B(v) = 1$ となる。以上より、

$$
\begin{aligned}
x' &= A(v)(x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= D(v)x + E(v)y + F(v)z + G(v)t
\end{aligned}
$$

となることがわかる。

ここで、ようやく光速度一定の原理が必要となってくる。今、K 系の座標原点から、$t=0$ の瞬間に、光の球面波が発射されたとしよう。光速度不変の原理と相対性原理から、この光は K' 系においても、K' 系の座標原点から $t'=0$ の瞬間に光の球面波が広がることになる。今、K 系においては、t、K' 系においては t' において光の先端はそれぞれの原点から ct, ct' 広がった位置にあるから、式に表すとそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= (ct)^2 &(1)\\
x'^2+y'^2+z'^2 &= (ct')^2 &(2)
\end{aligned}
$$

となる。よって、先に求めた x', y', z', t' を代入して、$(2)-(1)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
(ct')^2-(ct)^2 &= x'^2+y'^2+z'^2-(x^2+y^2+z^2)\\
&= A^2(x-vt)^2+y^2+z^2-(x^2+y^2+z^2)\\
&= A^2(x-vt)^2-x^2
\end{aligned}
$$

一方、上の式の左辺を求めると、

$$
(ct')^2-(ct)^2 = c^2[(Dx+Ey+Fz+Gt)^2-t^2]
$$

となるが、この両辺を比較すると、右辺には y や z の項が現れていないが、左辺には y や z と x 及び t との積が出てきてしまう。よってこの等式が、球面上の任意の点 x, y, z の組み合わせで成り立つためには、$E(v)=F(v)=0$ でなくてはならない。後は計算するのみである。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= c^2[(Dx+Gt)^2-t^2]\\
&= c^2D^2x^2+c^2(G^2-1)t^2+2c^2DGxt\\
\text{右辺} &= A^2(x-vt)^2-x^2\\
&= (A^2-1)x^2+v^2A^2t^2-2vA^2xt
\end{aligned}
$$

が得られるから、求める条件式は、

$$
\begin{aligned}
c^2D^2-A^2+1 &= 0 &(3)\\
c^2(G^2-1)-v^2A^2 &= 0 &(4)\\
c^2DG+vA^2 &= 0 &(5)
\end{aligned}
$$

となる。まず、$(4)\times c^2D^2$ より

$$
c^4D^2G^2-c^4D^2-c^2v^2A^2D^2=0 \tag{6}
$$

(5) より

$$
c^2DG=-vA^2 \tag{7}
$$

だから、(7) を (6) に代入して、

$$v^2A^4 - c^4D^2 - c^2v^2A^2D^2 = 0 \tag{8}$$

(3) より

$$c^2D^2 = A^2 - 1 \tag{9}$$

だから (9) を (8) に代入して

$$\begin{aligned} v^2A^4 - c^2(A^2-1) - v^2A^2(A^2-1) &= 0 \\ \therefore -(c^2-v^2)A^2 + c^2 &= 0 \\ \therefore A &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

ここで $v=0$ のとき $x' = A(0)x$ だから先ほどと同様に連続性から、

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

でなくてはならない。次に、(4) より

$$\begin{aligned} G^2 &= 1 + \frac{v^2A^2}{c^2} \\ &= 1 + \frac{1}{1-(v/c)^2}\frac{v^2}{c^2} \\ &= 1 + \frac{v^2}{c^2-v^2} \\ &= \frac{c^2-v^2+v^2}{c^2-v^2} \\ &= \frac{1}{1-(v/c)^2} \\ \therefore G(v) &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

ここで先ほどと同様に、$t = D(0)x + G(0)t$ が任意の t で成り立つために、$D(0) = 0, G(0) = 1$ でなければならないから、連続性より任意の v で、

$$G(v) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

が成り立つ。最後に、$A = G$ だから、(5) より

$$\begin{aligned} D &= \frac{-vA^2}{c^2G} \\ &= -A\frac{v}{c^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{v}{c^2} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta(v)(x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \beta(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\
\text{但し、}\beta(v) &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}
\end{aligned}
$$

が得られた。□

以上がローレンツ変換の導出であるが、実はこれでも細かいところでいろいろな仮定をしてしまっている。自分で論理的にどこまで少ない仮定で導けるか試してみたが、今のところこの辺が限界である。またアインシュタインの最初の論文による導出は、より少ない仮定で導いているのだが、その為か、より複雑になっている。ここでは簡潔さを最優先して導出した。