ローレンツ変換の導出

前提とする仮定

１．真空中を光が進む速さは常に$c(m/s)$である。（光速度不変）

２．同じ慣性系にある二点Ａ，Ｂに対して光がＡからＢに到達するのに要する時間は逆にＢからＡに立ち戻るのに必要な時間に等しい。

（相対性原理の一部）

以後、tを静止系の時刻を表すものとし、t_A, t'_A等を静止系のＡ点での時刻、t_B等を静止系Ｂ点での時刻とする。

※なお静止系とは自分（或いは観測者）の乗っている慣性系を示すものとする。

２．より同じ慣性系にある二点Ａ，Ｂに対して、点Ａで時刻t_Aに光を点Ｂに向けて発射し、点Ｂで時刻t_Bに光を反射し、点Ａで時刻t'_Aに戻ってきた光を観測したとすると、もし仮に、

$$t_B - t_A > t'_A - t_B$$

ならば、「t_Bはt_Aより進んだ時刻を表している」ことになるので、t_Bがt_Aに往復時間の半分を足した時刻であることより、

$$t_B = t_A + \frac{t'_A - t_A}{2} = \frac{t'_A + t_A}{2}$$

となるようにするために、その差

$$t_B - \frac{t'_A + t_A}{2}$$

だけ戻してやればよい。このようにして時計を合わせて、

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

になっているとき「時計Ａと時計Ｂは合っている」と定義しよう。

また明らかに、

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = c$$

である。

　ここで二つの系を用意する。
静止系 K
座標軸 (x, y, z, t)

（静止系 K に対して X 軸正の向きに速度 v で移動している）
慣性系 k
座標軸 (ξ, η, ζ, τ)

k 系の X 軸（むしろ Ξ 軸とすべきであろうが）上のある点に固定された一点を K 系から見ると、$x = l' + vt$ のように表される。
何故なら K 系から見て $t = 0$ に $x = l'$ の地点にあった点は、この k 系が K 系に対して X 軸の増加する方向に速度 v で等速直線運動をしているからである。
ここで注意すべきは l' はあくまでも「K 系からみた長さ」であるということである。別の言い方をすれば、今 k 系で原点から Ξ 軸上の l の地点まで長さ l の伸び縮みのしない剛体棒を横たえたとしたら、この棒の先端の座標が、K 系から見て $x = l' + vt$ であるということである。普通に考えればこの l' は k 系で見たときの棒の長さの l と等しくなりそうである。しかし、実はそうならないというのが、アインシュタインの発見であったのである。
式の形から明らかなように、x は時間が変わると値が変わってしまい、我々の今後の議論に不便である。そこで、$x' = x - vt$ とおけば、これは K 系から見た走っている棒の長さとなり、一定の値（$= l'$）となり便利な上に、$x = x' + vt$ により簡単に K 系での座標に変換できる。

今、K 系から見て $t=0$ のとき、K 系の原点の目の前を k 系の原点がちょうど通過したとしよう。またそのとき、k 系の原点にある時計は $\tau=0$ を指しているように見えたとしよう。このように時計が調整されているとき、これは逆に言えば、k 系の原点にいる観測者から見れば、自分の時計が $\tau=0$ のときに、目の前を横切る K 系の原点の時計は $t=0$ を指しているということを意味する。その意味では、この状況は普通に考えるのと一緒である。

今、K 系の時計が t_0 のとき k 系の原点から、Ξ軸の正の方向に光を発射したとしよう。そして、t_1 のときに運動している棒の先端に取り付けられた鏡によって反射し、t_2 のときに再び k 系の原点に戻ってきたとしよう。今この運動を K 系から見ていることより、発射された光とこの剛体棒との相対速度の関係から、光が往復する時間との関係を式に表すと、

行きは、

$$t_1 - t_0 = \frac{l'}{c-v}$$

戻ってくるときは、

$$t_2 - t_1 = \frac{l'}{c+v}$$

要するに、掛かった時間＝移動距離÷相対速度　である。

さてここで、我々は「果たして k 系の (ξ, η, ζ, τ) は K 系の (x', y, z, t) を使ってどのように表せるのか？を示したい。これは通常（相対性理論以前の物理の常識）の感覚と異なる結果を導くことにつながり、この変換公式は現在ローレンツ変換と呼ばれているようである。つまり、

$$\tau = \tau(x', y, z, t), \xi = \xi(x', y, z, t), \eta = \eta(x', y, z, t), \zeta = \zeta(x', y, z, t),$$

として表してみよう。（既に説明したように $x' = x - vt$ だから結局は x で表されている念のため。）

さて、このように記号を導入すると既に決まっていることがある。時間を t と τ を添字を含めて対応させると、最初原点同士が重なっているから、

$$\tau(0,0,0,0)=0$$

光を発射した時空に対応するのは、

$$\tau(0,0,0,t_0)=\tau_0$$

光を反射させた時空に対応するのは、

$$\tau(l',0,0,t_1)=\tau_1$$

光が原点に戻ってきた時空に対応するのは、

$$\tau(0,0,0,t_2)=\tau_2$$

さて、ここで τ は k 系、つまり走っている棒が静止系である系での時刻である。我々の考えている時計は全て静止系上で『時刻が合っている』のだから、静止している棒で光が往復する時間は行きも帰りも一緒のはずである。つまり、式で書くと、

$$\tau_1-\tau_0=\tau_2-\tau_1$$

つまり、

$$\frac{\tau_2+\tau_0}{2}=\tau_1$$

これは結局、

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_0)+\tau(0,0,0,t_2)\}=\tau(l',0,0,t_1)$$

ここでさらに、行きは、

$$t_1-t_0=\frac{l'}{c-v}$$

戻ってくるときは、

$$t_2-t_1=\frac{l'}{c+v}$$

であったから、

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_0)+\tau(0,0,0,t_0+(t_2-t_1)+(t_1-t_0)\}=\tau(l',0,0,t_0+(t_1-t_0))$$

より、

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_0)+\tau(0,0,0,t_0+\frac{l'}{c-v}+\frac{l'}{c+v})\}=\tau(l',0,0,t_0+\frac{l'}{c-v})$$

となる。

ここで残念ながら、元論文では偏微分を使っているため、流石に中学レベルの数学では解けなくなってくる。私もこの本に記載されたアインシュタインの論文の流れを頼りに理解している「程度」なのでそのまま進めると、

上の式で、

$$u=t_0+\frac{l'}{c-v}+\frac{l'}{c+v}, w=t_0+\frac{l'}{c-v}$$

とおいて、両辺を l' で偏微分すると、（偏微分の連鎖律より）

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial l'}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial l'}+\frac{\partial\tau}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial l'}$$

$$\therefore\frac{1}{2}\{\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\}\frac{\partial\tau}{\partial u}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial w}$$

ここで、

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}\text{は}\quad(x',y,z,t)=(0,0,0,u)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}\text{は}\quad(x',y,z,t)=(l',0,0,w)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial w}\text{は}\quad(x',y,z,t)=(l',0,0,w)$$

での値である。

ここで、$l'\to 0$ とすると、$u\to t, w\to t$ だから、

$$\frac{1}{2}\{\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

$$\therefore\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

これは$\tau = \tau(0,0,0,t_0)$で成り立つ式となる。
しかしここでの話の流れは、実は座標原点でなくても同じ話が成り立ち、単に説明を単純化するために座標原点としたに過ぎない。よって上の式は実は任意の(x',y,z,t)にて成り立つ。さて、同じk系で光を今度はY軸方向或いは、Z軸方向に往復されたらどうなるか？つまり、これまでの鏡を取り付けた（k系から見て長さlの）棒を今度は原点からY軸の正の方向において光を往復させるのである。これまでと同様流れの議論をすると、k系の移動方向が光の往復方向と直行しているために、異なる結果になる。Kから見た棒の長さを今度はl''とでもすると、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}
l'' &= \sqrt{c^2(t_1-t_0)^2 - v^2(t_1-t_0)^2} \\
&= \sqrt{c^2-v^2}(t_1-t_0) \\
&= \sqrt{c^2-v^2}(t_2-t_1)
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_0) + \tau(0,0,0,t_0 + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}})\} = \tau(0,l'',0,t_0 + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}})$$

より、先と同様にして、

$$u = t_0 + 2\frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}}, w = t_0 + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

として、

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial l''} = \frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l''} + \frac{\partial \tau}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial l''}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\frac{2l''}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial \tau}{\partial w}$$

よって、$l'' \to 0$で、

$$\frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{l''}{\sqrt{c^2-v^2}}\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

全く同様にして、

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{z}} = 0$$

今、時空の一様性によりτは一時式で表せるから、

$$\tau = Ax' + By + Cz + Dt + E$$

としてよい。今、

$$\tau(0,0,0,0) = 0$$

より、$E = 0$である。また、

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

より、$B = 0, C = 0$も得られるので、結局、

$$\tau = Ax' + Dt$$

となる。これを(1)に代入すると、

$$\begin{aligned} A + \frac{vD}{c^2 - v^2} &= 0 \\ \therefore A &= -\frac{v}{c^2 - v^2} D \\ \therefore \tau &= D\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right) \end{aligned}$$

よって、$D = a(v)$とすると、

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$$

ξ, η, ζをx, y, z, tを用いて表すのに上の結果を用いると、まず、ξの増加する方向に向けて光がk系の原点から$\tau = 0$の瞬間に発射されたとしよう。この光の先端の座標は、

$$\xi = c\tau$$

となる。よって、

$$\xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$$

一方、K 系から見れば、k 系の原点に対する光の先端の相対速度は $c-v$ である。そこで、

$$\frac{x'}{c-v}=t$$

よって、

$$\begin{aligned}\xi &= ac\left(\frac{x'}{c-v}-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)\\ &= ac\left(\frac{x'(c+v)-vx'}{c^2-v^2}\right)\\ &= a\frac{c^2}{c^2-v^2}x'\end{aligned}$$

上に述べたのと同じような考えを Y 及び Z 軸方向に進む光に適用することにより、

$$\eta=c\tau=ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

また、三平方の定理より、

$$(vt)^2+y^2=(ct)^2$$

だから、

$$t=\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}},x'=0$$

$$\begin{aligned}\eta &= ac\left(\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)\\ &= a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}y\end{aligned}$$

全く同様にして、

$$\zeta \quad = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z$$

ここで τ 及び ξ に対する式の中の x' を $x-vt$ に戻すと、

$$\begin{aligned}
\tau &= a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right) = \varphi(v)\beta(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\
\xi &= a\frac{c^2}{c^2 - v^2}x' = \varphi(v)\beta(v)\big(x - vt\big) \\
\eta &= a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y = \varphi(v)y \\
\zeta &= a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z = \varphi(v)z
\end{aligned}$$

ここで、

$$\beta(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \varphi(v) = \frac{a(v)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

である。

さて、静止系から見たとき、どんな光でも光の進む速さは c であることと、相対性原理を仮定して以上を導いたわけだが、ここで、ここで光速度不変の原理が相対性原理と矛盾しないことを確かめるために、同じ光を k 系から見ても速度が同じ c で変わらないことを示す必要がある。

（これにより 19 世紀末の多くの物理学者によって、想定された絶対静止エーテルの存在が否定されることになる。）

いま時刻 $t = \tau = 0$ に、一致している両座標系の共通の原点から光の球面波が発射されたとする。

K 系から見れば、この波は速さ c で次第に広がっていく。この球面波が、時刻 t に、点 (x, y, x) に到達したとすれば、

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

が成り立つ。

この関係式に、既に求めた (ξ, η, ζ, τ) と (x, y, z, t) の間の変換公式を用いると、

$$
\begin{aligned}
\xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= \{\varphi(v)\beta(v)(x-vt)\}^2+\{\varphi(v)y\}^2+\{\varphi(v)z\}^2 \\
&= \varphi^2(v)\{\beta^2(v)(x-vt)^2+y^2+z^2\} \\
&= \varphi^2(v)\{\beta^2(v)(x-vt)^2-x^2+x^2+y^2+z^2\} \\
&= \varphi^2(v)\{\beta^2(v)(x-vt)^2-x^2+c^2t^2\} \\
&= \varphi^2(v)\frac{(x-vt)^2-x^2(1-(v/c)^2)+c^2t^2(1-(v/c)^2)}{1-(v/c)^2} \\
&= \varphi^2(v)\frac{x^2-2vtx+v^2t^2-x^2+(v/c)^2x^2+c^2t^2-v^2t^2}{1-(v/c)^2} \\
&= \varphi^2(v)\frac{-2vtx+(v/c)^2x^2+c^2t^2}{1-(v/c)^2} \\
&= \varphi^2(v)\frac{\left(ct-\frac{v}{c}x\right)^2}{1-(v/c)^2} \\
&= c^2\varphi^2(v)\beta^2(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)^2 \\
&= c^2\tau^2
\end{aligned}
$$

この結果は、ここで考えた光の波は、k 系から眺めても、速さ c で広がる球面波になっていることを示している。これは、われわれの二つの基本原理がお互いに矛盾なく両立し得ることを示している。

さきに求めた変換公式には、v の関数 $\varphi(v)$ が、なお未定のままで顔を出している。これから、この φ を決定しよう。

この目的のために第 3 の座標系 K' を考えよう。この K' 系の座標原点は、k 系のそれに対して $-v$ の速度で Ξ 軸上を運動しているとする。さらに $t=0$ の瞬間には 3 つの座標の原点が全て一致し、K' 系の時刻 t' も $t'=0$ となっているとする。(先に述べたようにこの瞬間、$\tau=0$ でもある。さて、このようにすると、k 系を静止系とするときの Ξ 軸を $-v$ で動く K' 系に対しても先の変換公式が成り立つから、

$$
\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left(\tau+\frac{v}{c^2}\xi\right) \\
&= \varphi(-v)\beta(v)\left\{\varphi(v)\beta(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)+\frac{v}{c^2}\varphi(v)\beta(v)(x-vt)\right\} \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)\frac{t-\dfrac{v}{c^2}x+\dfrac{v}{c^2}x-\dfrac{v^2}{c\ 2}t}{1-(v/c)^2} \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)t \\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)(\xi+v\tau) \\
&= \varphi(-v)\beta(v)\left\{\varphi(v)\beta(v)(x-vt)+v\varphi(v)\beta(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\right\} \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)\frac{x-vt+vt-\dfrac{v^2}{c^2}x}{1-(v/c)^2} \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)x \\
y' &= \varphi(-v)\eta \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)y \\
z' &= \varphi(-v)\zeta \\
&= \varphi(v)\varphi(-v)z
\end{aligned}
$$

上の変換式に t は現れないので、この変換式は時間に無関係に座標だけで成り立つ。つまり K 系と K' 系は互いに相手に対して静止している。そして、$t=0$ のとき K 系と K' 系の座標原点が一致し時間と共に変化しないから、この K 系から K' 系への変換は高等変換になる。したがって、

$$\varphi(v)\varphi(-v)=1$$

でなくてはならない。
ここで $\varphi(v)$ の意味を考えよう。いま、k 系の原点から H 軸上に横たえた長さ l の剛体棒を考える。この棒の両端の座標は、$(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=(0,l,0)$ 及び $(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)=(0,0,0)$ である。この棒を K 系から眺めると、K 系の時刻が t のとき、上端の座標は、

$$\begin{aligned}
x_1 &= vt \\
\eta_1 &= l=\varphi(v)y_1 \therefore y_1=\frac{l}{\varphi(v)} \\
\zeta_1 &= 0=\varphi(v)z_1 \therefore z_1=0
\end{aligned}$$

また下端の座標は、

$$\begin{aligned}
x_2 &= vt \\
\eta_2 &= 0=\varphi(v)y_2 \therefore y_2=0 \\
\zeta_2 &= 0=\varphi(v)z_2 \therefore z_2=0
\end{aligned}$$

したがって、K 系から眺めたときの棒の長さは、$\dfrac{l}{\varphi(v)}$ となる。
ここで空間の対象性より、同様に x 軸の負方向に速度 v でこの剛体棒が走っても、長さは一緒だから、

$$\text{棒の長さ}=\frac{l}{\varphi(v)}=\frac{l}{\varphi(-v)}$$

より、

$$\varphi(v)=\varphi(-v)$$

である。ここで、

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1$$

だったから、結局、

$$\varphi(v) = 1$$

でなければならない。
よって、以上より、

$$\begin{aligned}
\tau &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\
\xi &= \beta\bigl(x - vt\bigr) \\
\eta &= y \\
\zeta &= z
\end{aligned}$$

ここで、

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

である。

※この変換公式をポアンカレの命名に従って、現在ではローレンツ変換と呼ぶ。