## 0.1　ローレンツ変換が 1 次式であることの証明

ここではローレンツ変換が何故一次変換であるのかを証明します．なおこの証明はガリレイ変換が 1 次式になることも全く同じやり方で証明できることを示しています．

まず，何かがある瞬間ある位置で起こった場合，これを事象 (= event) と呼ぶ．ある事象がある瞬間，ある位置で起こったことを決めるには，基準が必要である．ひとまず特殊相対論の範囲では，ある瞬間とある位置は，どちらも適当な慣性系 $K$ やその慣性系に対して等速直線運動をする別の慣性系 $K'$ で指し示すことが必要である．そこで $K$ 系で見た事象の世界点を $(ct,\, x,\, y,\, z) = (x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3) = x^\alpha$，$K'$ 系でみた同じ事象の世界点を $(ct',\, x',\, y',\, z') = (x^{0'},\, x^{1'},\, x^{2'},\, x^{3'}) = x^{\alpha'}$ で表すとき，各 $x^{\mu'}$ を $x^\mu$ 達の関数として表したものが，慣性系間の座標変換であるローレンツ変換 $L^\mu(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$ である:

$$x^{\mu'} = L^\mu(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3) = L^\mu(x^\alpha) \qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{1}$$

いま，時間と空間を合わせた 4 次元時空は時間も空間もそれぞれ一様なのでどの時刻，どの位置を座標原点に選んでも，全く同じ形式で座標変換されるはずだから，任意にもう一つの点 $\overline{x}^\mu$ を選んで原点を取り替えても，

$$x^{\mu'} - \overline{x}^{\mu'} = F^\mu(x^0 - \overline{x}^0,\, x^1 - \overline{x}^1,\, x^2 - \overline{x}^2,\, x^3 - \overline{x}^3) \tag{2}$$

$$= F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha) \qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{3}$$

を満たす $F^\mu$ が存在するはずである．これより，式 (1) を式 (2) に代入することによって，

$$L^\mu(x^\alpha) - L^\mu(\overline{x}^\alpha) = F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha) \qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{4}$$

が得られる．この式の両辺を $x^\rho$ 及び $\overline{x}^\sigma$ で微分してやると，

$$\frac{\partial^2 F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha)}{\partial x^\rho \partial \overline{x}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^\sigma}\left(L^\mu(x^\alpha) - L^\mu(\overline{x}^\alpha)\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial L^\mu(\overline{x}^\alpha)}{\partial \overline{x}^\sigma} = 0 \tag{5}$$

が得られる．ここで，

$$X^\alpha \equiv x^\alpha - \overline{x}^\alpha \tag{6}$$

と置いてやると，

$$0 = \frac{\partial^2 F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha)}{\partial x^\rho \partial \overline{x}^\sigma} = \frac{\partial^2 F^\mu(X^\alpha)}{\partial x^\rho \partial X^\nu}\frac{\partial X^\nu}{\partial \overline{x}^\sigma} = \frac{\partial^2 F^\mu(X^\alpha)}{\partial x^\rho \partial X^\nu}\frac{\partial (x^\nu - \overline{x}^\nu)}{\partial \overline{x}^\sigma} \tag{7}$$

$$= \frac{\partial^2 F^\mu(X^\alpha)}{\partial x^\rho \partial X^\nu}\left(-\delta^\nu_\sigma\right) = -\frac{\partial^2 F^\mu(X^\alpha)}{\partial x^\rho \partial X^\nu}\frac{\partial (x^\nu - \overline{x}^\nu)}{\partial x^\sigma} \tag{8}$$

$$= -\frac{\partial^2 F^\mu(X^\alpha)}{\partial x^\rho \partial X^\nu}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial^2 F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha)}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \tag{9}$$

これより，関係式 (4) を用いれば，

$$0 = \frac{\partial^2 F^\mu(x^\alpha - \overline{x}^\alpha)}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 (L^\mu(x^\alpha) - L^\mu(\overline{x}^\alpha))}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 L^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \tag{10}$$

である．いま，$\rho$ と $\sigma$ は自由に選べるから，特に $\rho = \sigma$ のときを考えると，

$$\frac{\partial^2 L^\mu}{\partial (x^\sigma)^2} = 0 \qquad (\sigma = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{11}$$

より，$L^\mu$ ($\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) は各 $\sigma = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対して $x^\sigma$ の 2 次以上の項を含むことはありえないことが分かる．次に $\rho \neq \sigma$ のとき，

$$\frac{\partial^2 L^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0 \qquad (\sigma,\ \rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \sigma \neq \rho) \tag{12}$$

と仮定すると，　ある $x^\rho$ を含まない関数 $A(x^\alpha\ (\alpha \neq \rho))$ があって，

$$\frac{\partial L^\mu(x^\alpha)}{\partial x^\sigma} = A(x^\alpha\ (\alpha \neq \rho)) \qquad (\rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \sigma \neq \rho) \tag{13}$$

と表せる．したがって，ある $B(x^\alpha\ (\alpha \neq \sigma))$ が存在して，

$$L^\mu(x^\alpha) = A(x^\alpha\ (\alpha \neq \rho))x^\sigma + B(x^\alpha\ (\alpha \neq \sigma)) \tag{14}$$

と表せることになる． ここで $B(x^\alpha\ (\alpha \neq \sigma))$ は $x^\sigma$ を含まないから，$\sigma$ が現れるのは，$A(x^\alpha\ (\alpha \neq \rho))x^\sigma$ だけである．しかしここで $x^\sigma$ に関して 2 次以上の項が現れないのだから，$A(x^\alpha\ (\alpha \neq \rho)$ は $x^\rho$ も $x^\sigma$ も含まない項である． ここで $\rho$ を $\rho \neq \sigma$ の範囲で全て動かせば，結局 $A$ は全ての変数を含まなくなるので定数以外表れないことになる．したがって $x^\sigma$ の現れる項は定数 $A$ を係数とした $Ax^\sigma$ の形に限られることが分かった.

こうして結局 $L^\mu$ は，定数 $A^\mu{}_\sigma$ と $C^\mu$ を用いて，

$$L^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) = A^\mu{}_\sigma x^\sigma + C^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{15}$$

のように $x^\sigma$ 達の 1 次式で表されることが分かった.