0.1　ガリレイ変換の導出

0.1.1　ガリレイ変換とは

ある慣性系 K 系 (x, y, z, t) と K 系の x 軸正の向きに速度 v で走る系 K' 系 (x', y', z', t') を考える。但し、K' 系の原点は K 系の原点と $t' = t = 0$ のとき一致しているものとする。このとき、K' 系の各座標 (x', y', z', t') は K 系の各座標 (x, y, z, t) を用いて、

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

と座標変換される。これをガリレイ変換と呼ぶ。

0.1.2　必要とする仮定

以下の 3 つの仮定を基本原理として認めることにする。なお、基本原理 2 は、アインシュタインの相対性理論によって否定される仮定ではあるが、ガリレイ変換の導出には必要な仮定なので認めることにする。

- **基本原理 0 空間の等方位性**
  空間はどの向きでも一様という仮定
- **基本原理 1　相対性原理**
  ガリレイの相対性原理（慣性系は互いに同等であるという原理）
- **基本原理 2　絶対時仮説**
  どのような立場でも時間の流れは一緒だという仮定

0.1.3 ガリレイ変換の導出

まず、最初に当然だが、基本原理2から $t' = t$ が成り立つ。次に x', y', z' だが、K 系の空間が一様であることより、相対性原理から K' 系も当然一様になっている。これは即ち、K' 系が K 系の変数を用いて一次式で表されることを示している。よって次の形をしている。

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + a_{25} \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + a_{35} \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

まず、上の式で、互いの原点が $t = t' = 0$ でかさなっていることより、$a_{15} = a_{25} = a_{35} = 0$ が成り立つ。次に x' 軸であるが、もし x' 軸が、x 軸と平行でないとすると、y, z 方向に傾いていることになるが、これは空間の等方位性に反する。よって x' 軸は x に平行なので、$a_{12} = a_{13} = 0$ でなければならない。よって、$x' = a_{11}x + a_{14}t$ となるが、今、K' 系の原点は K 系の時刻 t のとき、K 系から見て $x = vt$ の位置にある。これはつまり $\xi = x - vt$ とすると、x' はこの ξ の関数になっていなければならないことを意味する。よって $x' = f(\xi) = f(x - vt)$ でなければならないから、$x' = a_{11}(x - vt)$ が成り立つ。

次に y' であるが、もし z の係数 a_{23} が 0 でないとすると、y' 軸は y 軸に対して z 軸のいずれかの向きに傾いていることになるが、これは空間の等方位性より不自然である。故に $a_{23} = 0$ である。さらに、K 系から見て $(x, y, z) = (x, y, 0)$ の位置のとき、$y'_1 = a_{21}x + a_{22}y$。また、$(x, y, z) = (x, -y, 0)$ の位置のとき $y'_2 = a_{21}x - a_{22}y$ であるが、y と $-y$ は x 軸対称になっているので、K' 系の空間の一様性より、$y'_2 = -y'_1$ でなければならない。よって $a_{21}x = 0$ であるが、今 x は任意だったから、$a_{21} = 0$ でなければならない。以上より、$y' = a_{22}y + a_{24}t$ となるが、これは $a_{24} \neq 0$ のとき、$y' = a_{22}(y + \frac{a_{24}}{a_{22}}t)$ の形となり、これでは y' が y 軸に対して運動をしていることになってしまい、K' 系の運動方向の仮定に反する。よって $a_{24} = 0$ でなければならない。これより、$y' = a_{22}y$ である。全く同様の議論により、$z' = a_{33}z$ も成り立つ。ここで、y 軸、z 軸の取り方は任意だから、$a_{33} = a_{22}$ が成り立つ。結局、以上をまとめると、各係数は速度 v に依存することより v の関数になるから、

$$
\begin{aligned}
x' &= A(v)(x - vt) \\
y' &= B(v)y \\
z' &= B(v)z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

と表されることが分かる。

ここで、まだ求まっていない $A(v), B(v)$ を求めよう。そのために K' 系に対して x' 軸の負の方向に速度 v で走る K'' 系 (x'', y'', z'', t'') を考える。またこの K'' 系の原点は $t' = t'' = 0$ のとき、一致しているものとする。すると K' 系から K'' 系への上の変換によって、

$$
\begin{aligned}
x'' &= A(-v)(x' + vt') \\
y'' &= B(-v)y' \\
z'' &= B(-v)z' \\
t'' &= t'
\end{aligned}
$$

が成り立つ。一方、K 系と K' 系との間には、

$$
\begin{aligned}
x' &= A(v)(x - vt) \\
y' &= B(v)y \\
z' &= B(v)z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

の関係があるのだから、結局、

$$
\begin{aligned}
x'' &= A(-v)(x' + vt') \\
&= A(-v)(A(v)(x - vt) + vt) \\
&= A(v)A(-v)x + A(-v)(1 - A(v))vt \\
y'' &= B(-v)y' \\
&= B(v)B(-v)y \\
z'' &= B(-v)z' \\
&= B(v)B(-v)z \\
t'' &= t' \\
&= t
\end{aligned}
$$

が成り立つことになる。ところが、相対性原理より K 系から速度 v で x 軸の正の方向に進む K' 系から見ると、逆に K 系は速度 v で x' 軸負の向きに移動しているように見える。これはつまり、K'' 系が K 系に一致することに他ならない。よって、

$$
\begin{aligned}
x &= A(v)A(-v)x + A(-v)(1 - A(v))vt \\
y &= B(v)B(-v)y \\
z &= B(v)B(-v)z
\end{aligned}
$$

となるが、x 座標に関する等式は簡単で時刻 t が変化しても等式が成り立つためには、$A(v) = A(-v) = 1$ しかありえないことが分かる。

また、y 軸 z 軸に対しては、$B(v)B(-v)=1$ であるが、これも空間の等方位性より、$B(-v)=B(v)$ でなければならないので、結局、$B(v)=B(-v)=\pm 1$ が成り立つことが分かる。ところがここで y' は $v=0$ のとき y に一致しなくてはならないから、$\mathrm{y}=B(0)y$ より $B(0)=1$ であるが、速度 v の値の連続的な変化で、y' の値が不連続にならないためには、どんな v に対しても $B(v)=-1$ あってはならない。よって、任意の v で $B(v)=1$ となる。以上より基本原理 1,2,3 を仮定するとこの変換は、

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= t
\end{aligned}
$$

となることがわかる。□

以上がガリレイ変換の導出であるが、実はこれでも細かいところでいろいろな仮定をしてしまっている。自分で論理的に考えてどこまでの仮定でできるか試してみたが、今のところこの辺が限界である。また、当然ガリレオはこんな細かい数式計算は行わなかったに違いない。この導出は"どれだけ少ない仮説で"ガリレイ変換を導けるか？という実験であるが、実はこのことを丁寧に考えて変換公式を導いたのがアインシュタインでその変換公式こそがローレンツ変換なのである。