マックスウェル方程式からポアンカレ変換を導く

３つの可能性

ニュートンは恐らく真空をただの空っぽの空間と考えていた．このように考えると静止している観測者とそれに対して等速直線運動をしている観測者にとって空っぽの空間は同じようなものに見えてもおかしくないだろう．これはガリレイ変換によって，真空の性質が変わらないことを意味する．ところが，19 世紀も末になると電磁気学の基礎方程式であるマックスウェル方程式の解として得られる電磁波は，正にこの真空を伝わる波であることが分かった．となるとここで二つの異なる仮説が持ち上がってくるであろう．一つ目は通常の波が全て媒体をもち，媒体に対して静止している観測者からのみ正しい波の速度が観測されるということから，真空中にもこのような未発見の電磁波を伝える媒体，エーテルがあり，電磁波の伝わる速度はこのエーテルに対して静止している観測者に対するものであるという考えである．もう一つの仮説は真空はやはり空っぽの空間で空っぽの空間はガリレイ変換で性質が変わらないのだから，ガリレイ変換で波の伝わる速度が変わらないという可能性である．この場合，マックスウェル方程式はガリレイ変換で不変であることが要請されるが，残念ながら簡単な計算でマックスウェル方程式もそこから導かれる電磁波の波動方程式も不変でないことが示されていた．

ここで当時の状況を整理してみよう．

当時分かっていたこと (前提条件)

状況 1 マックスウェル方程式はガリレイ変換で保存しない

状況 2 ニュートンの力学法則はガリレイ変換で保存する (慣性系の取り方によらない[1])

状況 3 電磁波を除くそれまで知られていた波は全て媒体があり[2]，波の伝わる速さの絶対的基準はその媒体に対して静止している観測者の座標系である． 従って当然ニュートン力学においても，通常の波はガリレイ変換で保存しないし，それで問題はない．

以上の事実より次の３つの場合が考えられるだろう:

仮説 1 絶対静止エーテルが存在する．従ってそもそも電磁波の伝わる速度はガリレイ変換で保存しないし，電磁波を導くマックスウェル方程式は，あくまでもこの絶対静止エーテルに対してしか厳密には成り立たない．

仮説 2 電磁気の法則は慣性系によらずに成り立ち，慣性系間の座標変換はガリレイ変換である．従って電磁気の法則はガリレイ変換で不変であるべきで，ガリレイ変換で不変でないマックスウェル方程式は単なる近似理論に過ぎない．

仮説 3 マックスウェル方程式はどのような慣性系においても同等であり絶対的な座標系は存在しない．従ってマックスウェル方程式がガリレイ変換で不変でないことから，慣性系間の座標変換はガリレイ変換ではなく，マックスウェル方程式を保存するような新たな変換を考えるべきである．

よく知られているように，アインシュタインが示したのが 3 の立場である．3 を仮定すると電磁気学の法則のみならず，力学の成り立つ慣性系間の座標変換までこの新たな変換に従わなくてはならなくなってしまい，もはやニュートンの法則もガリレイ変換も近似的にしか成り立たないことになる．しかしこの立場が正しいことが有名なマイケルソン・モーレーの実験 (1887) や現在であれば素粒子加速器や GPS 衛星の設計・運用等によって証明され，また大学学部生の実験等によっても常に確かめられているという．詳しくは [1] 松田卓也・木下篤哉 : 相対論の正しい間違え方（丸善, 2001）などを参照するとよいだろう．

これからの節ではこの 3 番目の立場に従って，マックスウェル方程式を不変にするような慣性系間の座標変換を導くことを考えよう．

[1]ここで慣性系間の変換法則としてガリレイ変換が成り立つものと仮定している

[2]現在であれば重力波なども真空を伝わるとしてよいだろう

マックスウェル方程式からポアンカレ変換を導く

この節ではいよいよマックスウェル方程式を保存するような慣性系間の座標変換である，ポアンカレ変換を導こう．この変換は既に，前節で導出済みであるが，前節では光速度不変の原理を仮定して導いたのであった．今回は光速度不変の原理は仮定せず，マックスウェル方程式を保存する変換として導く．

まず，前回と同じく次の式から始めよう:

$$c\bar{t} = act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{1}$$

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r} \tag{2}$$

ここで，言うまでもなく K 系の座標 $(ct,\ \boldsymbol{r})$ を $\overline{K}$ 系から見た座標を $(c\bar{t},\ \overline{\boldsymbol{r}})$ としている．また，a は定数，$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$ は 3 次の列ベクトル，G は 3 次の正方行列とし，この a, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$, G を決定することによりこの座標変換の形を決定することにしよう．

さて，まず最初にこの座標変換で $\boldsymbol{f}$ は簡単に決定することが出来る．前節の証明と同様にして，$\overline{K}$ 系に対して静止している観測者の座標を考えると，(2) 式より，

$$\boldsymbol{f}ct + G\boldsymbol{r} = \overline{\boldsymbol{r}} = const.$$

だから，t で微分することにより，

$$\boldsymbol{f}c + G\dot{\boldsymbol{r}} = 0$$

であるが $\dot{\boldsymbol{r}}$ とは，$\overline{K}$ 系に対して静止している観測者を K 系からみたときの速度だから，K 系からみた $\overline{K}$ 系の相対速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，

$$\boldsymbol{f}c + G\boldsymbol{v} = 0$$

つまり，$\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c$ と置くと，

$$\boldsymbol{f} = -G\boldsymbol{\beta}$$

となり未知の量だった $\boldsymbol{f}$ が，G と既知の量 $\boldsymbol{\beta}$ で表されることになる．これより (1), (2) は，

$$c\bar{t} = act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

$$\overline{\boldsymbol{r}} = G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) \tag{4}$$

と表される．さていよいよマックスウェル方程式に代入してその形が保存するという条件を求めよう．まず K 系で表されたマックスウェル方程式は次の形になる:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho, \tag{7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{i}, \tag{8}$$

ここでベクトルとスカラーが混ざっている式となっていることに注意しよう．この式において $\boldsymbol{D}$ 及び $\boldsymbol{H}$ は，それぞれ真空中では $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ が成り立っているから真空中に荷電粒子が散在しているような状況においては,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{11}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{i}, \tag{12}$$

と表せることになる．但し，$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を用いた．

ここで真空中に荷電粒子が散在している状況と断ったが，実際には一般の場合にも誘電体等を構成するのは原子であり，原子は真空の空間を挟んで散在する．従って誘電体や磁性体のある一般の場合の電磁気学の法則も，実際には真空の空間に荷電粒子が散在している場合についての座標変換を考えれば成り立つことが予想される．今回の証明のみでそれを結論付けるのは論理的な流れとしては厳密ではないが，その証明は一般には困難であると思われるのでここでは扱わない．但し，そもそもマックスウェル方程式を保存する座標変換としてポアンカレ変換を導く試み自体がこの分野の殆どの書籍では扱ってはいないことは一応触れておこう．

さて，ここで (9) から (12) までの式は，全て微分演算子 ∇ と時間 t に関する偏微分の式からなっている．ここで,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

であるから，マックスウェル方程式の座標変換を考える場合，$\partial/\partial x^\alpha$, $(\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ を全て求める必要があるだろう．ここで，$F = F(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) = F(ct,\ x,\ y,\ z)$ を任意のスカラー関数とすると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial t},\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial x},\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial y},\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial z},
\end{aligned}$$

であるから演算子は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},\\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{t}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},
\end{aligned}$$

と表される．ここで，(3)，(4) より

$$\begin{aligned}
c\bar{t} &= act + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r},\\
\overline{\boldsymbol{r}} &= G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)
\end{aligned}$$

の両辺を各変数で微分することにより,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = a,\ \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x,\ \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y,\ \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z,\\
&\frac{\partial \overline{\boldsymbol{r}}}{\partial t} = -G\boldsymbol{v},\ \frac{\partial \overline{\boldsymbol{r}}}{\partial x} = G\boldsymbol{e}_x,\ \frac{\partial \overline{\boldsymbol{r}}}{\partial y} = G\boldsymbol{e}_y,\ \frac{\partial \overline{\boldsymbol{r}}}{\partial z} = G\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

が得られるから，演算子の式に代入することにより,

$$\frac{\partial}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \overline{x}} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \overline{y}} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = a\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - (G\boldsymbol{v})\cdot\overline{\nabla}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + (G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + (G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_x)\cdot\overline{\nabla}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + (G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + (G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_y)\cdot\overline{\nabla}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial \overline{x}} + (G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial \overline{y}} + (G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (G\boldsymbol{e}_z)\cdot\overline{\nabla}, \tag{16}$$

が得られる．

さて演算子が求まったところで，早速マックスウェル方程式に代入してみよう．まずは一番易しそうな形をしている (9) 式を変形してみよう．この式は見た目はベクトル式だが実際にはスカラーである．成分で書くと，

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\cdot(U_x\boldsymbol{e}_x+U_y\boldsymbol{e}_y+U_z\boldsymbol{e}_z)=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_xU_x+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_yU_y+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_zU_z$$

の関係が成り立つので演算子を置き換えると，

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\\
&= \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{t}}+(G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{x}}+(G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_x}{\partial\overline{y}}+(G\boldsymbol{e}_x)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_x}{\partial\overline{z}}\\
&\quad+\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{t}}+(G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_y}{\partial\overline{x}}+(G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{y}}+(G\boldsymbol{e}_y)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_y}{\partial\overline{z}}\\
&\quad+\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{t}}+(G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_z}{\partial\overline{x}}+(G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_z}{\partial\overline{y}}+(G\boldsymbol{e}_z)\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{z}}\\
&= \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{t}}+{}^t\boldsymbol{e}_x{}^tG\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{x}}+{}^t\boldsymbol{e}_x{}^tG\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_x}{\partial\overline{y}}+{}^t\boldsymbol{e}_x{}^tG\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_x}{\partial\overline{z}}\\
&\quad+\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{t}}+{}^t\boldsymbol{e}_y{}^tG\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_y}{\partial\overline{x}}+{}^t\boldsymbol{e}_y{}^tG\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{y}}+{}^t\boldsymbol{e}_y{}^tG\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_y}{\partial\overline{z}}\\
&\quad+\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{t}}+{}^t\boldsymbol{e}_z{}^tG\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_z}{\partial\overline{x}}+{}^t\boldsymbol{e}_z{}^tG\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_z}{\partial\overline{y}}+{}^t\boldsymbol{e}_z{}^tG\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{z}}\\
&= \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial B}{\partial\overline{t}}+{}^t\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{x}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_x+{}^t\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{y}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_y+{}^t\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial B_x}{\partial\overline{z}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_z\\
&\qquad\qquad+{}^t\left(\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{x}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_x+{}^t\left(\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{y}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_y+{}^t\left(\boldsymbol{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial\overline{z}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_z\\
&\qquad\qquad+{}^t\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{x}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_x+{}^t\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial B_z}{\partial\overline{y}}\right){}^tG\boldsymbol{e}_y+{}^t\left(\frac{\partial B_z}{\partial\overline{z}}\boldsymbol{e}_z\right){}^tG\boldsymbol{e}_z\\
&= \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial B}{\partial\overline{t}}+{}^tG\boldsymbol{e}_x\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{x}}\right)+{}^tG\boldsymbol{e}_y\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{y}}\right)+{}^tG\boldsymbol{e}_z\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial\overline{z}}\right)\\
&= \frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial B}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_x\cdot B)}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_y\cdot B)}{\partial\overline{y}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_z\cdot B)}{\partial\overline{z}}
\end{aligned}$$

以上より，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial B}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_x\cdot B)}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_y\cdot B)}{\partial\overline{y}}+\frac{\partial({}^tG\boldsymbol{e}_z\cdot B)}{\partial\overline{z}}=0 \tag{17}$$

が成り立つことが分かった．

さてここで，我々はマックスウェル方程式が $\overline{K}$ 系においても同じ形であることを要請するのであるから，$\overline{K}$ 系での磁場を $\overline{B}$ と表すことにすれば，(17) 式において，

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial B}{\partial\overline{t}}=0, \tag{18}$$

$$\overline{B}_{\overline{x}}=({}^tG\boldsymbol{e}_x)\cdot B, \tag{19}$$

$$\overline{B}_{\overline{y}}=({}^tG\boldsymbol{e}_y)\cdot B, \tag{20}$$

$$\overline{B}_{\overline{z}}=({}^tG\boldsymbol{e}_z)\cdot B, \tag{21}$$

でなければならない．

次に (10) 式の各成分についてみてみよう．その前に，簡単にベクトル積 $\times$ について定義を記そう:

$$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U}\overset{\text{def}}{=}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & V_x & U_x\\ \boldsymbol{e}_y & V_y & U_y\\ \boldsymbol{e}_z & V_z & U_z\end{vmatrix}$$

である．これを用いて (10) 式を展開しよう．ここで，$G=(g_{ij})$ とすると，まず x 成分は，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & E_y\\ \frac{\partial}{\partial z} & E_z\end{vmatrix}+\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t}&\\
&=\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_z}{\partial \bar{t}}+G\boldsymbol{e}_y\cdot\overline{\nabla}E_z-\frac{1}{c}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_y}{\partial \bar{t}}-G\boldsymbol{e}_z\cdot\overline{\nabla}E_y+a\frac{\partial B_x}{\partial \bar{t}}-(G\boldsymbol{v})\cdot\overline{\nabla}B_x\\
&=\begin{pmatrix}g_{12}\\ g_{22}\\ g_{32}\end{pmatrix}\cdot{}^t\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\overline{x}} & \frac{\partial}{\partial\overline{y}} & \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\end{pmatrix}E_z-\begin{pmatrix}g_{13}\\ g_{23}\\ g_{33}\end{pmatrix}\cdot{}^t\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\overline{x}} & \frac{\partial}{\partial\overline{y}} & \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\end{pmatrix}E_y\\
&\quad-(G\boldsymbol{v})\cdot{}^t\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\overline{x}} & \frac{\partial}{\partial\overline{y}} & \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\end{pmatrix}B_x+\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{b_2}{c}E_z-\frac{b_3}{c}E_y+aB_x\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\Big[g_{12}E_z-g_{13}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_xB_x\Big]+\frac{\partial}{\partial\overline{y}}\Big[g_{22}E_z-g_{23}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_yB_x\Big]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big[g_{32}E_z-g_{33}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_zB_x\Big]+\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\Big[\frac{b_2}{c}E_z-\frac{b_3}{c}E_y+aB_x\Big]
\end{aligned}$$

これが，

$$\frac{\partial\overline{E}_{\overline{z}}}{\partial\overline{y}}-\frac{\partial\overline{E}_{\overline{y}}}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial\overline{B}_{\overline{x}}}{\partial\bar{t}}=0$$

に等しくなければならないから，

$$0=\begin{vmatrix}g_{12} & E_y\\ g_{13} & E_z\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_xB_x=g_{12}E_z-g_{13}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_xB_x \tag{22}$$

$$\overline{E}_{\overline{z}}=\begin{vmatrix}g_{22} & E_y\\ g_{23} & E_z\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_yB_x=g_{22}E_z-g_{23}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_yB_x \tag{23}$$

$$-\overline{E}_{\overline{y}}=\begin{vmatrix}g_{32} & E_y\\ g_{33} & E_z\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_zB_x=g_{32}E_z-g_{33}E_y-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_zB_x \tag{24}$$

$$\overline{B}_{\overline{x}}=\frac{1}{c}\begin{vmatrix}b_2 & E_y\\ b_3 & E_z\end{vmatrix}+aB_x=\frac{b_2}{c}E_z-\frac{b_3}{c}E_y+aB_x \tag{25}$$

となる．同様に y, z 成分は対称性より，サイクリックに x, y, z を入れ替えることにより，

$$\overline{E}_{\overline{x}}=\begin{vmatrix}g_{33} & E_z\\ g_{31} & E_x\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_zB_y=g_{33}E_x-g_{31}E_z-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_zB_y \tag{26}$$

$$0=\begin{vmatrix}g_{23} & E_z\\ g_{21} & E_x\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_yB_y=g_{23}E_x-g_{21}E_z-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_yB_y \tag{27}$$

$$-\overline{E}_{\overline{z}}=\begin{vmatrix}g_{13} & E_z\\ g_{11} & E_x\end{vmatrix}-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_xB_y=g_{13}E_x-g_{11}E_z-(G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_xB_y \tag{28}$$

$$\overline{B}_{\overline{y}}=\frac{1}{c}\begin{vmatrix}b_3 & E_z\\ b_1 & E_x\end{vmatrix}+aB_y=\frac{b_3}{c}E_x-\frac{b_1}{c}E_z+aB_y \tag{29}$$

$$-\overline{E}_{\overline{x}} = \begin{vmatrix} g_{21} & E_x \\ g_{22} & E_y \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_y B_z = g_{21}E_y - g_{22}E_x - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_y B_z \tag{30}$$

$$\overline{E}_{\overline{y}} = \begin{vmatrix} g_{11} & E_x \\ g_{12} & E_y \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_x B_z = g_{11}E_y - g_{12}E_x - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_x B_z \tag{31}$$

$$0 = \begin{vmatrix} g_{31} & E_x \\ g_{32} & E_y \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_z B_z = g_{31}E_y - g_{32}E_x - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_z B_z \tag{32}$$

$$\overline{B}_{\overline{z}} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} b_1 & E_x \\ b_2 & E_y \end{vmatrix} + aB_z = \frac{b_1}{c}E_y - \frac{b_2}{c}E_x + aB_z \tag{33}$$

が得られる．よってこのうち，$\overline{\boldsymbol{B}}$ についての式を抜き出し (19)，(20)，(21) と比べると，

$$\overline{B}_{\overline{x}} = ({}^t G\boldsymbol{e}_x) \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} b_2 & E_y \\ b_3 & E_z \end{vmatrix} + aB_x$$

$$\overline{B}_{\overline{y}} = ({}^t G\boldsymbol{e}_y) \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} b_3 & E_z \\ b_1 & E_x \end{vmatrix} + aB_y$$

$$\overline{B}_{\overline{z}} = ({}^t G\boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} b_1 & E_x \\ b_2 & E_y \end{vmatrix} + aB_z$$

だから，3 次の単位行列を I_3 とすると，

$$G\boldsymbol{B} = I_3 G\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_x \\ {}^t\boldsymbol{e}_y \\ {}^t\boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} G\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} ({}^t G\boldsymbol{e}_x) \cdot \boldsymbol{B} \\ ({}^t G\boldsymbol{e}_y) \cdot \boldsymbol{B} \\ ({}^t G\boldsymbol{e}_z) \cdot \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = a\boldsymbol{B} + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & E_y \\ b_3 & E_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & E_z \\ b_1 & E_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & E_x \\ b_2 & E_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = a\boldsymbol{B} + \frac{1}{c}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E}$$

よって，

$$G\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{B} + \frac{1}{c}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{E} \tag{34}$$

が得られた．次に (22)，(27)，(32) より，

$$0 = \begin{vmatrix} g_{12} & E_y \\ g_{13} & E_z \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_x B_x$$

$$0 = \begin{vmatrix} g_{23} & E_z \\ g_{21} & E_x \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_y B_y$$

$$0 = \begin{vmatrix} g_{31} & E_x \\ g_{32} & E_y \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_z B_z$$

だから，

$$(G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{B} = (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_x B_x + (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_y B_y + (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{e}_z B_z$$

また，

$$\begin{aligned} ({}^t G\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_x + ({}^t G\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_y + ({}^t G\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_z &= \left[\begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix} \times \boldsymbol{E}\right] \cdot \boldsymbol{e}_x + \left[\begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \end{pmatrix} \times \boldsymbol{E}\right] \cdot \boldsymbol{e}_y + \left[\begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} \times \boldsymbol{E}\right] \cdot \boldsymbol{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} g_{12} & E_y \\ g_{13} & E_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{23} & E_z \\ g_{21} & E_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{31} & E_x \\ g_{32} & E_y \end{vmatrix} \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} (G\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{B} &= ({}^t G\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_x + ({}^t G\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_y + ({}^t G\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{e}_z \\ &= \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{e}_x \times {}^t G\boldsymbol{e}_x) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{e}_y \times {}^t G\boldsymbol{e}_y) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{e}_z \times {}^t G\boldsymbol{e}_z) \end{aligned}$$

が得られる．

また，残りの $\overline{\boldsymbol{E}}$ についての式より，

$$\overline{E}_{\overline{x}} = \begin{vmatrix} g_{33} & E_z \\ g_{31} & E_x \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_z B_y = -\begin{vmatrix} g_{21} & E_x \\ g_{22} & E_y \end{vmatrix} + (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_y B_z,$$
$$\overline{E}_{\overline{y}} = \begin{vmatrix} g_{11} & E_x \\ g_{12} & E_y \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_x B_z = -\begin{vmatrix} g_{32} & E_y \\ g_{33} & E_z \end{vmatrix} + (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_z B_x,$$
$$\overline{E}_{\overline{z}} = \begin{vmatrix} g_{22} & E_y \\ g_{23} & E_z \end{vmatrix} - (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_y B_x = -\begin{vmatrix} g_{13} & E_z \\ g_{11} & E_x \end{vmatrix} + (G\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{e}_x B_y,$$

が成り立つから，

$$(G\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{e}_y B_z + \boldsymbol{e}_z B_y) = ({}^tG\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_x + ({}^tG\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_z \times {}^tG\boldsymbol{e}_y) + \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_y \times {}^tG\boldsymbol{e}_z)$$
$$(G\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{e}_z B_x + \boldsymbol{e}_x B_z) = ({}^tG\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_x + ({}^tG\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_x \times {}^tG\boldsymbol{e}_z) + \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_z \times {}^tG\boldsymbol{e}_x)$$
$$(G\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{e}_x B_y + \boldsymbol{e}_y B_x) = ({}^tG\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_y + ({}^tG\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_y \times {}^tG\boldsymbol{e}_x) + \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{e}_x \times {}^tG\boldsymbol{e}_y)$$

参考文献

[1] 松田卓也・木下篤哉：相対論の正しい間違え方（丸善, 2001）