非常に長い完全剛体の棒を振り回すと先端の速度は光速を超えるか？

ネットで相対論関係の掲示板などを見ていると何度も見かけるのが表題のように、非常に長い棒を回転させたら先端の速度が光速度を越えるんじゃないかといった内容のものです。勿論、相対論によってそれは否定されるはずなのですが、実際にどのように計算すればそれが確かめられるのかについては殆どの人が口をつぐんでいます。そして、その代わりに、そもそも完全剛体棒が存在しないとか、回転の速度が速くなると、棒が無限に重くなるのでふりまわせないとか、回転運動は加速が伴うため一般相対論で議論しなければならず、従って簡単には計算できないなどの多くのもっともらしい、しかし、結局充分に納得のいかない”数式計算の現れない”議論が展開されます。完全剛体が存在しない事も、棒が重すぎてまわせない事も、実際上の問題としては確かに間違いではありません。しかし、アインシュタイン自身が自らの論文ではそのような完全剛体がローレンツ収縮することを述べているように、完全剛体が存在しない事と相対論は本来無関係で、従って完全剛体が存在するとしても、相対論的効果によって光速度を超える事は無いはずです。また良く誤解されているのですが、加速運動が特殊相対論では全く扱えないと思われているようですが、これについても加速する系とその瞬間同じ速度で移動する慣性系を選び、ごくごく僅かの時間を考えれば、例え加速度があっても速度の変化は殆ど無視でき、従って特殊相対論が適用できるのです。ここでは、特殊相対論の速度の合成則を用いて長い棒を振り回したときの先端の速度の式を求めてみます。

まず，相対論的速度の合成則は，静止系に対して速度 u で x 軸正の方向に進む系からみて速度 v で x 軸正の方向に運動する物体を静止系から見たときのこの物体の移動速度を V とすると，

$$V = \frac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$$

が成り立つと言うものでした．今ここで長さ R の棒を角速度 ω で振り回す事を考えます．極座標で考えると中心からの距離 r での方位角方向の速度を $V(r)$ とするとこの点の観測者からみた $r+dr$ の地点の速度は ωdr だから，速度の合成則により，

$$V(r+dr) = \frac{V(r)+\omega dr}{1+\dfrac{V(r)\omega dr}{c^2}}$$

となるのでこれを整理すると，

$$V(r+dr)-V(r) = \omega dr - \frac{V(r+dr)V(r)\omega dr}{c^2} = \left(1-\frac{V(r+dr)V(r)}{c^2}\right)\omega dr = \left\{1-\left(\frac{V(r)}{c}\right)^2\right\}\omega dr$$

をえる．なお，二次以上の無限小が無視できることので $V(r+dr)d\omega = V(r)d\omega$ とすることを用いた．これより，

$$\frac{dV}{1-\left(\frac{V(r)}{c}\right)^2} = \frac{V(r+dr)-V(r)}{1-\left(\frac{V(r)}{c}\right)^2} = \omega dr$$

が成り立つので，両辺を積分すると，

$$R\omega = \int_0^R \omega dr = \int_0^{V(R)} \frac{dV}{1-\left(\frac{V(r)}{c}\right)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{V(R)} \frac{1}{1+V/c} + \frac{1}{1-V/c} dV = \frac{c}{2}\log\left|\frac{1+V(R)/c}{1-V(R)/c}\right|$$

$$\therefore e^{\frac{2R\omega}{c}} = \frac{1+V(R)/c}{1-V(R)/c} = \frac{-(1-V(R)/c)+2}{1-V(R)/c} = \frac{2}{1-V(R)/c} - 1$$

これより，

$$V(R) = c\left(1-\frac{2}{e^{\frac{2R\omega}{c}+1}}\right)$$

が得られる．この式を見ると棒の長さ R が長いほど，そして角速度 ω が大きいほどより光速に近い速度で先端が回るが，決して光速度を超える事は無いことが分かる．なお R は任意なので，任意の中心からの距離 r に対してこの式は成り立っている．