0.0.1　座標系全体での時刻の定義について

ある（慣性）座標系 $K:(t,\, x,\, y,\, z)$ において，ある質点 M の運動を観察することを考える． M の運動は，その位置 $\boldsymbol{r}$ を時刻 t の関数とするとき，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ のように表すことができるであろう． ここで位置 $\boldsymbol{r}$ ついては，基準として定めた原点 O から，$x,\, y,\, z$ 軸方向に物指しを用いて，各位置ごとに空間にジャングルジムのように目印をつけてしまえば良いだろう． こうすれば，M の位置が，この目印の 1 つとぴったり一致した瞬間の位置をこの目印の座標で読めば，この瞬間の M の座標 $(x,\, y,\, z)$ が得られることになる．

一方，時刻 t についてはどうであろうか？一般に時計を原点に置いて，それを離れた位置からでも目視などで読み取る，というのはそのままでは問題がある． というのも，原点から離れた位置になるほど，光の伝わる速さの分だけ”古い”時刻になってしまうからである． そこで次のように考えよう． ある瞬間 M が位置 $(x,\, y,\, z)$ に居たとし，このときの原点の時計をこの位置から読み取った場合の時刻を t_O とする． すると原点の時計から反射された光は,

$$\frac{\text{原点から } M:(x,\, y,\, z) \text{ までの距離}}{\text{光の速さ（}=c\text{）}} = \text{経過時間} \tag{1}$$

より,

$$\text{経過時間 } t_d = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{c} \tag{2}$$

だけ時間が経過しているはずである． したがって，M がこの位置に居る瞬間の時刻 t は,

$$\text{t} = t_O + t_d = t_O + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{c} \tag{3}$$

とすれば良いことがわかる．

これで原理的には原点以外での時刻が分かったが，このことは同時に，(3) 式によって位置 $(x,\, y,\, z)$ での時計を合わせておけばその後は各点に置いた時計を用いても，指し示す時刻は (3) 式で毎回求める時刻と一緒になることがわかるので，以後このようにして時刻を合わせた時計を各点に置いてあるものと考え，各点での時計によって時刻を求めることにしよう．

0.0.2　座標変換が運動する質点についても適用できること

さて，このようにして，慣性系 $K : (t,\, x,\, y,\, z)$ において定義された 4 次元の時間と空間の”座標”があれば，任意の質点の運動を K 系で記述できることはほぼ明らかであろう． それでは，2 つの慣性座標系 K，K' が変換公式,

$$t' = F^0(t,\, x,\, y,\, z) \tag{4}$$

$$x' = F^1(t,\, x,\, y,\, z) \tag{5}$$

$$y' = F^2(t,\, x,\, y,\, z) \tag{6}$$

$$z' = F^3(t,\, x,\, y,\, z) \tag{7}$$

で結ばれているとき，**静止している座標** $(x,\, y,\, z)$ **と** t **に対して**この変換公式が成り立てば，それは運動する質点 $M : \boldsymbol{r} = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ に対してもこの座標変換がそのまま適用できることは自明であろうか？（それが自明に思える方はこれ以降の説明を飛ばして読んでも構わない．）

次のように考えてみよう．

まず，慣性系 K と K' は共にすでに述べた方法で，全座標系で時刻の合わせてある時計が置いてあるものとする．（こんな当たり前なことができるのも，任意の慣性系で真空中を伝わる光の速さが変わらないという光速度不変の原理があるからである．音を用いた場合ではこうはいかない．）

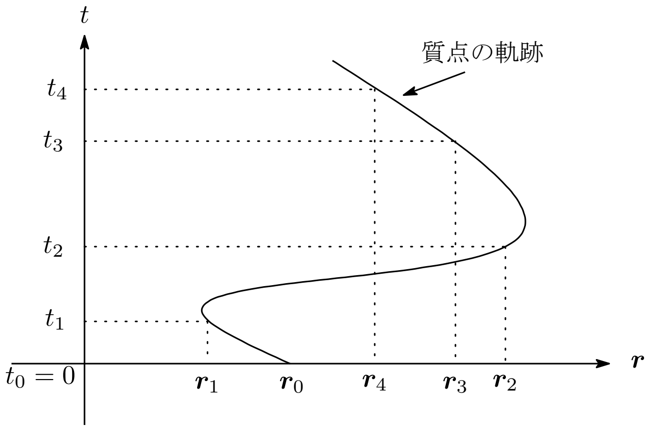

図 1: 運動する質点の座標

いま，K 系で，図のように質点 M の運動に対し，時刻 t_n の時の M の座標をサンプルにとって，

$$\boldsymbol{r}_n \equiv \boldsymbol{r}(t_n) = (x_n,\, y_n,\, z_n) \tag{8}$$

と表すことにしよう．このとき，$\boldsymbol{r}_n$ は座標軸 $(x,\, y,\, z)$ に固定されたラベルなので，変換公式によって，

$$t'_n = F^0(t_n,\, x_n,\, y_n,\, z_n) = F^0(t_n,\, x(t_n),\, y(t_n),\, z(t_n)) \tag{9}$$
$$x'_n = F^1(t_n,\, x_n,\, y_n,\, z_n) = F^1(t_n,\, x(t_n),\, y(t_n),\, z(t_n)) \tag{10}$$
$$y'_n = F^2(t_n,\, x_n,\, y_n,\, z_n) = F^2(t_n,\, x(t_n),\, y(t_n),\, z(t_n)) \tag{11}$$
$$z'_n = F^3(t_n,\, x_n,\, y_n,\, z_n) = F^3(t_n,\, x(t_n),\, y(t_n),\, z(t_n)) \tag{12}$$

が成り立つことになる．これはサンプルにとった座標によらないから，充分サンプルをとる点を細かくすれば,

$$t' = {t'}_n = F^0(t_n, x_n, y_n, z_n) = F^0(t_n, x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \tag{13}$$
$$x' = {x'}_n = F^1(t_n, x_n, y_n, z_n) = F^1(t_n, x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \tag{14}$$
$$y' = {y'}_n = F^2(t_n, x_n, y_n, z_n) = F^2(t_n, x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \tag{15}$$
$$z' = {z'}_n = F^3(t_n, x_n, y_n, z_n) = F^3(t_n, x(t_n), y(t_n), z(t_n)) \tag{16}$$

となるから，任意の時刻 t に対して,

$$t' = F^0(t, x(t), y(t), z(t)) \tag{17}$$
$$x' = F^1(t, x(t), y(t), z(t)) \tag{18}$$
$$y' = F^2(t, x(t), y(t), z(t)) \tag{19}$$
$$z' = F^3(t, x(t), y(t), z(t)) \tag{20}$$

とできることを示している．これは，時間と空間のラベルさえ，各座標に貼ってあれば，後はそのラベルを用いて運動する質点の座標についても座標変換できるということを表している．こんなことはわかりきっている人には当たり前のことなのであろうが，このことが実感できないと，後で説明する相対論的速度の合成則のところでつまずくかもしれないと思い，あえて説明することにした.