第 VI 部
付録

2　古典解析力学について

ハミルトンの原理

古典力学を最小作用の原理で再構成した力学体系を解析力学というが，ここで最小作用の原理は一般にある作用積分の極値になってさえいればよく，最大値や変極点である場合もある．このため最小作用の原理は一般にハミルトンの原理や変分原理と呼ばれる．ここでは，質点系に対するハミルトンの原理を導く．

2.1　ハミルトンの原理を導く質点系の運動方程式を用意する

まず，n 個の質点からなる質点系をデカルト座標で，

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{1}$$

として用意する．このとき，運動方程式と，束縛条件から，

$$m\ddot{x}_i = \overline{F}_i \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{2}$$

$$g_\nu(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{3n}) = 0 \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \cdots,\, h), \tag{3}$$

が成り立っているものとすると，仮想仕事の原理とラグランジュの未定乗数法より，

$$m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{4}$$

が成り立つ．但し，F_i は束縛力以外の力の成分を表す．結局，解くべき方程式は，(4) と (3) からなる，

$$m\ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{h} \lambda_\nu \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3n), \tag{5}$$

$$g_\nu(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, h) = 0 \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \cdots,\, h), \tag{6}$$

となる．

2.1.1　質点系に対するハミルトンの原理を導く

さて，このように用意した質点系に対しハミルトンの原理を次のようにして導く．

まず，デカルト座標 $x_i = x_i(t)$ に対して仮想的に変位させた座標を $\overline{x}_i = x_i + \delta x_i$ とし，系全体の運動量を T で

表すと，

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \overline{T} - T dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\overline{x}}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i + \delta \dot{x} \right)^2 - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left\{ \dot{x}_i^2 + 2\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + (\delta \dot{x})^2 \right\} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \left\{ 2\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + (\delta \dot{x})^2 \right\} dt \\
&\simeq \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\delta x_i \right) dt \\
&= \left[\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i dt
\end{aligned}
$$

ここで，積分の端点は固定されているため仮想変位 $\delta x_i = 0$ だから，一項目は全体が 0 になる．

$$
= 0 - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} F_i \delta x_i dt
$$

ここで，$F_i \delta x_i$ は第 i 成分方向の束縛力以外の外力がする仮想仕事であるが，もともと束縛力は仕事をしないのだから単に第 i 成分方向の外力全体がする仮想仕事である．従ってこれを W_i と置けば，

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} W_i dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1} W dt,
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\therefore \int_{t_0}^{t_1} \delta T + W dt = 0, \tag{7}
$$

が得られた．但し，W は質点に対する仮想仕事を表す．

2.1.2 ハミルトンの原理から最小作用の原理を導く

束縛力以外の外力がポテンシャル V のみの場合，ハミルトンの原理は容易にラグランジアン L が停留値をとるという形になることが示せる．式 (143) において，外力が行う仮想仕事 W はポテンシャルの定義より $W = -\delta V$ である．従ってこれを (143) に代入すると，

$$
\int_{t_0}^{t_1} \delta T + W dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T - \delta V = \int_{t_0}^{t_1} \delta (T - V) = \delta \int_{t_0}^{t_1} L = 0, \tag{8}
$$

よりラグランジアンの変分が 0 になることが示された．

2.2 オイラー・ラグランジュ方程式の導出

ここでは力がポテンシャルから導け，従ってラグランジアン L が定義できる場合について解析力学における運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導く.

オイラー・ラグランジュ方程式とは次のものであった:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\,2,\,\cdots,\,f)$$

この式においてラグランジアン L は系全体の運動量を T，ポテンシャルを V と置いたとき，$L=T-V$ によって定義される量である（但しラグランジアンとして別の定義を持ってくることも可能である．）．この式はニュートンの運動方程式と本質的に同値であるが，この形式のままで使える座標が広義座標を含む幅広いものがあるのが特徴である．早速この式を導いてみよう．

まず最初にラグランジアンの変分が 0 であるという条件より,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1}\delta L dt &= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right)dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i dt+\left[\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt
\end{aligned}$$

ここで二項目は積分の端点が固定されているから全体が 0 になる．よって,

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i-\sum_{i=1}^{f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{f}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つが，t_0 と t_1 の間隔を微小にすると，この被積分関数は当然定数関数に近づくが，右辺が 0 のためその定数は 0 でなくてはならない．いま δq_i 達は微小の変位とはいえ 0 ではないから，δq_i が掛かっている括弧の中身が全て 0 であるはずである．よって,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (i=1,\,2,\,\cdots,\,f)$$

即ち,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\,2,\,\cdots,\,f)$$

が得られた．これを力がポテンシャルより導けず，ラグランジアンが定義できない一般のラグランジュ方程式と区別して，オイラー・ラグランジュの方程式と呼ぶ.

2.3 ハミルトニアンとハミルトンの正準方程式

2.3.1 ハミルトンの正準方程式

オイラー・ラグランジュの運動方程式は,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad (i=1,\,2,\,\cdots,\,f) \tag{9}$$

であった．この方程式は（殆ど）どのような座標を選んでも同じ形で書けるというメリットがあるが，ニュートンの運動方程式に対応して時間の二回微分を含んでしまうという特徴がある．この方程式をより解きやすく，より対称性がはっきりするように変形したものがこれから導くハミルトンの正準方程式である.

まず最初に方程式 (1) を一階の微分方程式にするために,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{10}$$

と置こう．こうすると，L が $\{q_i\}$, $\{\dot{q}_i\}$ 及び t の関数であることより，p_i 達も,

$$p_i = p_i(q_1,\, q_2,\, \cdot,\, q_f,\, \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \cdots,\, \dot{q}_f,\, t), \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{11}$$

となる．これを (1) 式に代入することにより,

$$\frac{d}{dt}p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f)$$

即ち,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f)$$

が得られるから,

$$\begin{aligned}
dL &= \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\
&= \sum_{i=1}^{f}(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\
&= \sum_{i=1}^{f} d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{f}(\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i) + \frac{\partial L}{\partial t}dt
\end{aligned}$$

と書けるから,

$$d\left(\sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{f}(\dot{q}_i dp_i - p_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{12}$$

が成り立つ．ここで,

$$H \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - L \tag{13}$$

と置くと，(4) の右辺の形から考えて，H の独立変数は $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ 及び t ととるのが適当なので，(3) を $\dot{q}_i$ について解き,

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1,\, q_2,\, \cdot,\, q_f,\, p_1,\, p_2,\, \cdots,\, p_f,\, t), \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{14}$$

達を (5) に代入して,

$$H = H(q_1,\, q_2,\, \cdot,\, q_f,\, p_1,\, p_2,\, \cdots,\, p_f,\, t), \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{15}$$

と書くことが出来る．このように (5) で定義された H を一般化座標 $\{q_i\}$ と一般化運動量 $\{p_i\}$ で書き表したとき，これをハミルトニアンと呼ぶ.

$$dH = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{16}$$

だから，(4) と比較することにより,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{17}$$

及び,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \tag{18}$$

が得られる.

2.3.2 ハミルトニアンとエネルギー積分

さて，前項までに得られたハミルトニアン H とは一体物理的に何を意味するのであろうか？それを確認するために次のエネルギー積分を求めよう．ここでは，力がポテンシャルから導ける場合について示す．

まず，オイラー・ラグランジュの方程式より，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, f) \tag{19}$$

であるから, $\dot{q}_i$ を掛けて和をとると,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{20}$$

が成り立つ．ここで,

$$L = L(q_1(t),\, q_2(t),\, \cdots,\, q_f(t),\, \dot{q}_1(t),\, \dot{q}_2(t),\, \cdots,\, \dot{q}_f(t)), \tag{21}$$

が成り立つから,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i, \tag{22}$$

より,

$$\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dL}{dt} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i, \tag{23}$$

が成り立つから，(12) 式は,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{dL}{dt} - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) = 0, \tag{24}$$

となるので，これをまとめると,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L\right) = 0, \tag{25}$$

より,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L = C(\text{定数}), \tag{26}$$

が得られる．このままではこの結果が何を意味するのか分かりにくいから,

$$\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{27}$$

の部分が一体何を意味するのか調べてみよう．まずデカルト座標で表した運動エネルギー T は次の通りである:

$$T = \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2, \tag{28}$$

ここで $\dot{x}_i$ 達は広義座標 $\dot{q}_i$ 達と,

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \tag{29}$$

の関係で結ばれているから，これを (20) に代入して,

$$T = \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2, \tag{30}$$

が成り立つから，これを $\dot{q}_r$ で偏微分して，

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \times 2 \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_r}, \tag{31}$$

これに $\dot{q}_r$ を掛けて和をとると，

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{f} \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} &= \sum_{r=1}^{f} \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \times 2 \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r & (32) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \sum_{r=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r & (33) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{f} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 & (34) \\ &= 2T, & (35) \end{aligned}$$

この結果を式 (18) に代入すると，

$$H = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - L = 2T - (T - V) = T + V = C, \tag{36}$$

より，ハミルトニアン H は全エネルギーを表し，それが保存することを示す式であることが分かる．逆に言えば，正準変数としての関係，

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{37}$$

を満たす，一般化座標 $\{q_i\}$ 及び $\{p_i\}$ によって系全体のエネルギーが表されていればまず”大体は”ハミルトニアンになっているのでそれによって簡単に運動方程式を解くことが出来ることになる．この結果をまとめると次のようになる: まず，

1. $L = T - V$ などによって系のラグランジアンを一般化座標 $\{q_i\}$, $\{\dot{q}_i\}$ で表す．
2. $p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ によって一般化運動量を定義する．
3. $H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L$ と置く．
4. $H = L(q_1, q_2, \cdot, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f, t)$ を改めて，$H = H(q_1, q_2, \cdot, q_f, p_1, p_2, \cdots, p_f, t)$ に変数変換をしておく．
5. このようにして得られたハミルトニアン H に対して，$\dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\quad \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ 及び，$\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$ が新しい運動方程式になる．この式は変数の個数が 2 倍になったのと引き換えに，ニュートンの運動方程式やオイラー・ラグランジュ方程式と異なり一階の方程式であり，かつ，変数 q_i と p_i に対してかなり対称性がある形になっている．
6. ポテンシャルから (束縛力以外の) 力が導ける場合，ハミルトニアン H は系の全エネルギーを表す．

ポアソン括弧

量子論において正準交換関係はその構成においてきわめて重要かつ基本的な働きをする．古典論の範囲でそれに対応するのがこれから述べるポアソン括弧である．この項では量子論を念頭においてこのポアソン括弧を説明する．

ポアソン括弧の定義式

その意味などを説明するのでなければポアソン括弧自体の定義は簡単である: 正準変数 $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ とその関数 $A = A(\{q_i, p_i\})$, $B = B(\{q_i, p_i\})$ に対して,

$$[A, B]_C \overset{\text{def}}{=} \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \tag{38}$$

によって定義される $[A, B]_C$ をポアソン括弧式と呼ぶ．ポアソン括弧式の表記にはいろいろな書き方の流派があり，単に $[A, B]$ とする流派や，$\{A, B\}$ などと表す流派があるが，いずれも単に記号法上の問題で意味は一緒である．ここでは量子論に出てくる正準交換関係に $[A, B]$ を用いるのでそれとは微妙に違うとの意味合いを込めて，古典論（Clasical）の頭文字をとって $[A, B]_C$ と表すことにする．

定理 2.1. 正準変数の組 $\{q_i, p_i\}$ に対して, 任意の物理量 A が $A = A(\{q_i, p_i\}, t)$ で表されるとき，次が成立する：

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]_C \tag{39}$$

但し，$\{q_i, p_i\}$ が正準変数であるとはある適当なハミルトニアン H に対して次の関係があるものをいう：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{40}$$

証明.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \tag{41}$$

ここで (3) の関係式を用いると,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{42}$$

であるが，ここで最後の行はポアソン括弧の式の定義式そのものである．従って,

$$\sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = [A, H]_C \tag{43}$$

だから結局,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]_C$$

が示された． □

この定理より，時間 t を直接（陽に）含まない一般化座標 $\{q_i\}$ や一般化運動量 $\{p_i\}$ に対しては，右辺初項が 0 つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t}q_i = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}p_i = 0, \tag{44}$$

となるから，（陰に含んでいるのは偏微分に影響を与えないことに注意）

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = [q_i, H], \tag{45}$$

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = [q_i, H], \tag{46}$$

が成り立つ．逆にこの式が成り立つとき，この式はハミルトンの正準方程式そのものを表すことを示す次の定理が成り立つ：

定理 2.2. $\dot{q}_i = [q_i, H]_C$ 及び $\dot{p}_i = [p_i, H]_C$ が成り立つとき，両式はハミルトンの正準方程式を表す．

証明.

$$\dot{q}_i = [q_i, H]_C = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_j \delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{47}$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H]_C = \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_j -\delta_{ij}\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{48}$$

□

定理 2.3. ポアソン括弧式の変数に正準変数の組 $\{q_i, p_i\}$ を考えると，次が成り立つ：

$$[q_i,\, q_j]_C = 0, \tag{49}$$

$$[p_i,\, p_j]_C = 0, \tag{50}$$

$$[q_i,\, p_j]_C = \delta_{ij}, \tag{51}$$

証明.

$$[q_i,\, q_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (\delta_{ik} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{jk}) = 0 \tag{52}$$

同様に,

$$[p_i,\, p_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (0 \cdot \delta_{jk} - \delta_{ik} \cdot 0) = 0 \tag{53}$$

一方,

$$[q_i,\, p_j]_C = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k (\delta_{ik}\delta_{jk} - 0 \cdot 0) = \delta_{ij} \tag{54}$$

となることが分かる. □