第 VI 部
付録

1　デルタ関数の諸性質

定義 3.1.(47) 式において，特に $f(x) \equiv 1$ のとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \delta(x'-x)dx' = 1 \tag{1}$$

かつ，任意の $\Delta > 0$ に対し，定理 3.2. より，

$$\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} 1 \cdot \delta(x'-x)dx' = 1 \tag{2}$$

が成り立たなくてはならないことになる．これは大雑把に言えば，

$$\delta(x'-x) = \begin{cases} 0 \quad\quad for \quad x \neq x', \\ \infty \quad\quad for \quad x = x', \end{cases}$$

が成り立っていることになる．数学的にはこれは明らかに通常の意味での関数にはならない．しかし物理ではこの関数は何も量子力学にかかわらずよく出てくる．例えば力学における衝突の問題では一般に力積 $F\Delta t$ は衝突時間 Δt が殆ど 0 であるのに力積は 0 にならない．この場合の F はデルタ関数を用いて表すと衝突時間が 0 とみなして現実の衝突問題をほぼ正しく扱うことが出来る．一方，計算途中でひとたび無限大が出てしまうと，その後の計算は正しく実行することが出来ない．どのくらい大きいのか？どのくらい小さいのかが？失われてしまうためである．しかし，このことはデルタ関数を考えるときに，常に (39) の積分を行うと考えればこの問題は回避できる．そこで以後，デルタ関数を考えるときには常に定義式 (39) に立ち返るものとして議論を進めよう．

定理 1.1 (デルタ関数の性質)**.**

$$\delta(-x) = \delta(x) \qquad (\text{デルタ関数は偶関数}), \tag{3}$$

$$\delta(Kx) = \frac{1}{|K|}\delta(x), \tag{4}$$

この定理の証明であるが，デルタ関数の定義式 (38) において，$X \equiv x' - x$ とおけば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(X)dX = f(x) \tag{5}$$

となりこれは当然 (39) 式と同値である．この形のほうが，デルタ関数がそのまま X のみの関数となっているので分かりやすいかもしれない．

$\delta(x) = \delta(-x)$ の証明．
(45) 式において，式の中の $\delta(X)$ を $\delta(-X)$ に置き換えると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(-X)dX$$

となるので，$Y \equiv -X$ と変数変換すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(-X)dX = \int_{\infty}^{-\infty} f(-Y+x)\delta(Y)(-1)dY = \int_{-\infty}^{\infty} f(-Y+x)\delta(Y)dY$$

ここで $g(Y) \equiv f(-Y+x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(-X)dX &= \int_{\infty}^{-\infty} f(-Y+x)\delta(Y)(-1)dY \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-Y+x)\delta(Y)dY \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(Y)\delta(Y)dY \\ &= g(0) \\ &= f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(X)dX\end{aligned}$$

従って，(45) を定義式とみなすと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(-X)dX = \int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(X)dX$$

が得られたので，$\delta(x) = \delta(-x)$ が示された． □

$\delta(Kx) = \dfrac{1}{|K|}\delta(x)$ の証明．
やはり (45) 式において，式の中の $\delta(X)$ を $\delta(KX)$ に置き換えると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(KX)dX$$

となるので，$Y \equiv KX$ とおくと，例えば $K<0$ のときには，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(KX)dX = \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\tfrac{Y}{K}+x\right)\delta(Y)\frac{1}{K}dY = \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tfrac{Y}{K}+x\right)\delta(Y)dY$$

ここで $g(Y) \equiv f\left(\tfrac{Y}{K}+x\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(KX)dX &= \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\tfrac{Y}{K}+x\right)\delta(Y)\frac{1}{K}dY \\
&= \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tfrac{Y}{K}+x\right)\delta(Y)dY \\
&= \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{\infty} g(Y)\delta(Y)dY \\
&= \frac{1}{|K|}g(0) \\
&= \frac{1}{|K|}f(x) \\
&= \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\delta(X)dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(X+x)\frac{1}{|K|}\delta(X)dX
\end{aligned}$$

従って，$\delta(KX) = \dfrac{1}{|K|}\delta(X)$ が示された． □

定理 1.2. $F(x)$ も $F(x)$ の逆関数もどちらも一価で一回微分可能な関数のとき，

$$\delta(F(x) - F(x_0)) = \frac{1}{|F'(x)|}\delta(x - x_0) \tag{6}$$

が成り立つ．

証明. 次を示せばよい:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x) - F(x_0))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F'(x)|}\delta(x - x_0)dx \tag{7}$$

ここで，$F(x)$ も $F(x)$ の逆関数もどちらも一価で一回微分可能な関数なのだから単調増加か単調減少の関数である． 従って，任意の x について $F'(x) \geq 0$ か，任意の x について $F'(x) \leq 0$ のいずれかである． そこで今，$F'(x) \leq 0$ の場合について証明しよう．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x) - F(x_0))dx$$

において，$y \equiv F(x)$ と変数変換する．すると，$dx = \dfrac{1}{F'(x)}dy = -\dfrac{1}{|F'(x)|}dy$ だから，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x)-F(x_0))dx &= \int_{\infty}^{-\infty} f(F^{-1}(y))\delta(y-F(x_0))\left(-\frac{1}{|F'(x)|}\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(F^{-1}(y))}{|F'(F^{-1}(y))|}\delta(y-F(x_0))dy \\
&= \frac{f(F^{-1}(F(x_0)))}{|F'(F^{-1}((F(x_0)))|} \\
&= \frac{f(x_0)}{|F'(x_0)|} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|F'(x)|}\delta(x-x_0)dx
\end{aligned}$$

従って，

$$\delta(F(x)-F(x_0)) = \frac{1}{|F'(x)|}\delta(x-x_0)$$

が示された． □

定理 1.3. $F(x)$ が x の一回微分可能な一価関数のとき，$F(x)=0$ の根を x_k ($k=1,\ 2,\ \cdots$) とすると，

$$\delta(F(x)) = \sum_k \frac{1}{|F'(x_k)|}\delta(x-x_k) \tag{8}$$

が成り立つ．

証明. $F(x_k)=0$ の充分小さい近傍 (c_k，c_{k+1}) を選べばこの近傍で $F(x)$ は単調であるとしてよい．そこで $F_k(x)$ を，$c_k < x < c_{k+1}$ では $F_k(x) = F(x)$，それ以外では $F_k(x)$ が全体として単調になるように定義する．例えば作為的ではあるが $c_{k+1} < c_k$ なら，

$$F_k(x) = \begin{cases} F(c_k) + c_k - x \qquad x < c_k, \\ F(x) \qquad c_k < x < c_{k+1}, \\ F(c_{k+1}) + c_{k+1} - x \qquad x > c_{k+1} \end{cases} \tag{9}$$

などと定義すれば，この条件を満たす．このとき，$F_k(x)=0$ は $x=x_k$ のみを解に持つ．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x))dx$$

は $F(x)$ が 0 である付近以外では積分に寄与しないから，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x))dx &= \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\delta(F_k(x))dx \\
&= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F_k(x)-F_k(x_k))dx
\end{aligned}$$

ここで定理 3.3. より，

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F_k(x)-F_k(x_k))dx = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F_k'(x)|}\delta(x-x_k)dx$$

再び $\delta(x-x_k)$ は x が x_k のとき以外にはこの積分に寄与しないから，

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F_k'(x)|}\delta(x-x_k)dx = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F_k'(x_k)|}\delta(x-x_k)dx$$

従ってこれより，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(F(x))dx &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F_k'(x_k)|}\delta(x-x_k)dx \\
&= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{|F'(x_k)|}\delta(x-x_k)dx
\end{aligned}$$

となるので，(48) 式が示された． □