便利な公式と定理

定理 1.1. $\hat{A}$ をエルミート演算子とするとき，$\hat{A}^k|\Psi\rangle = \mathbf{0}$ ならば，$\hat{A}|\Psi\rangle = \mathbf{0}$ である．

証明. $k=1$ のとき明らか．$k=2$ のときは，$\hat{A}^2|\Psi\rangle = \mathbf{0}$ とすると，

$$\|\hat{A}|\Psi\rangle\|^2 = \langle \hat{A}\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{A}^2|\Psi\rangle = 0 \tag{1.1}$$

より，$\hat{A}|\Psi\rangle = \mathbf{0}$ が示された．次に $k>2$ とすると，$|\Psi'\rangle \equiv \hat{A}^{k-2}|\Psi\rangle$ と置けば，$\hat{A}^k|\Psi\rangle = \hat{A}^2|\Psi'\rangle = \mathbf{0}$ より，

$$\hat{A}^{k-1}|\Psi\rangle = \hat{A}|\Psi'\rangle = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

が成り立つので，任意の $k>2$ に対してその次数を 1 つづつ下げることができる．従って，

$$\hat{A}^k|\Psi\rangle = \mathbf{0},\ \hat{A}^{k-1}|\Psi\rangle = \mathbf{0},\ \cdots,\ \hat{A}^2|\Psi\rangle = \mathbf{0},\ \hat{A}|\Psi\rangle = \mathbf{0} \tag{1.3}$$

が順に得られるので，任意の k に対して定理が成り立つことが示された． □

定理 1.2. $\hat{A}$ をエルミート演算子とし，

$$\phi(\hat{A}) \equiv \hat{A}^n + a_1\hat{A}^{n-1} + a_2\hat{A}^{n-2} + \cdots\cdots + a_n\hat{1} = \hat{0} \tag{1.4}$$

を $\hat{A}$ の満足する最も簡単な代数方程式とすると，

(α)　$\hat{A}$ の (異なる) 固有値の個数は n 個．
(β)　$\hat{A}$ の固有ケットがある個数 ($\geq n$) 存在し，任意のケットはそれら固有ケットの線形結合で表せる．

証明. $\phi(x)=0$ は x に関する単なる n 次代数方程式だから，当然重複もこめて n 個の解 $c_1, \cdots, c_n$ があり，最高次の係数が 1 であることより，

$$\phi(x) = (x-c_1)(x-c_2)\cdots\cdots(x-c_n) \tag{1.5}$$

と表せる．ここでエルミート演算子 $\hat{A}$ 同士は可換だから，この式の x に $\hat{A}$ を代入した，

$$\phi(\hat{A}) = (\hat{A}-c_1\hat{1})(\hat{A}-c_2\hat{1})\cdots\cdots(\hat{A}-c_n\hat{1}) \tag{1.6}$$

も成り立つ．但し，演算子であることを明示するために念のため $\hat{1}$ を明示したが以後，混乱の恐れはないと思われるのでこの $\hat{1}$ を省略することにする．いま $\phi(\hat{A})$ を $(\hat{A}-c_r)$ で割った商を $\chi_r(\hat{A})$ としよう．つまり，

$$\phi(\hat{A}) = (\hat{A}-c_r)\chi_r(\hat{A}) \qquad (r=1,2,\cdots\cdots,n) \tag{1.7}$$

とする．すると，$\phi(\hat{A})$ の定義より，どんなケット $|\Psi\rangle$ に対しても，

$$(\hat{A}-c_r)\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle = \phi(\hat{A})|\Psi\rangle = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

が成り立つが，いま，$\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle$ が全てのケット $|\Psi\rangle$ に対して $\mathbf{0}$ であるということはありえない．何故なら，もしそうなら，$\chi_r(\hat{A})$ 自身が $\hat{0}$ ということになるが，これは，$n-1$ 次式 $\chi_r(\hat{A}) = \hat{0}$ が $\phi(\hat{A}) = (\hat{A}-c_r)\chi_r(\hat{A}) = \hat{0}$ より簡単な代数方程式ということになり，仮定に反するからである．従って，$|\Psi\rangle$ を $\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle \neq \mathbf{0}$ となるように選べば，$\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle$ は，

$$\hat{A}\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle = c_r\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle \tag{1.9}$$

となり，$\chi_r(\hat{A})|\Psi\rangle$ は，$\hat{A}$ の固有ケットで固有値 c_r に属することが分かる．この議論は r が 1 から n までのどれについても当てはまるから c_r のそれぞれが固有値であることになる．また，これ以外の数が $\hat{A}$ の固有値になることもない．何故なら，そのような固有値を c' としその固有ベクトルを $|c'\rangle$ と置くと，$\hat{A}|c'\rangle = c'|c'\rangle$ となるので，

$$\phi(\hat{A})|c'\rangle = \phi(c')|c'\rangle \tag{1.10}$$

が導かれるが，いま，左辺は $\mathbf{0}$ なので，$\phi(c') = 0$ でなければならないからである．

□