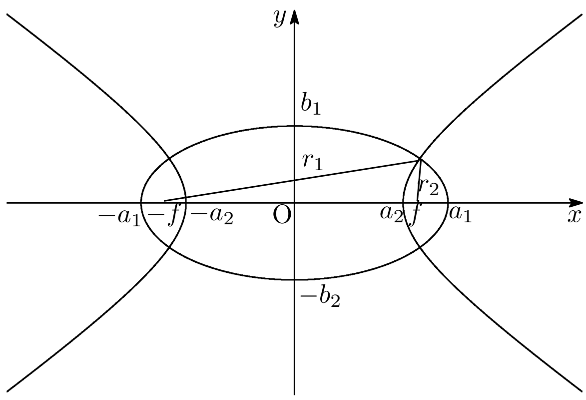
楕円体座標を求める

焦点 $F(f,\,0),\ F'(-f,\,0)$ の楕円・双曲線

一般に焦点 $F(f,\,0),\ F'(-f,\,0)$ の楕円・双曲線の定義とは，定点 $(f,\,0)$ から $(x,\,y)$ までの距離と定点 $(-f,\,0)$ から同じ $(x,\,y)$ までの距離の和が等しくなるような曲線 $(x,\,y)$ を楕円，差が等しくなるような曲線を双曲線と呼ぶ．このとき，楕円と双曲線は次のように表される:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow f = \sqrt{a^2 \mp b^2} \tag{1}$$



楕円と双曲線のデカルト座標表示式を求める

証明. 楕円と双曲線の両方の場合の証明を一緒に行う．距離の和と距離の差をそれぞれ 2ℓ と置くとき，定義より，

$$r_1 \pm r_2 = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \pm \sqrt{[x-(-f)]^2 + y^2} = 2\ell \tag{2}$$

だから，この両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned}
&(x-f)^2 + y^2 + (x+f)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{[(x-f)^2+y^2][(x+f)^2+y^2]} && (3)\\
&= 2(x^2+y^2+f^2) \pm 2\sqrt{[(x^2+y^2+f^2)-2fx][(x^2+y^2+f^2)-2fx]} && (4)\\
&= 4\ell^2 && (5)
\end{aligned}$$

より，

$$\pm\sqrt{[(x^2+y^2+f^2)-2fx][(x^2+y^2+f^2)-2fx]} = \pm\sqrt{(x^2+y^2+f^2)^2 - 4f^2x^2} = 2\ell^2 - (x^2+y^2+f^2) \tag{6}$$

が得られるので，さらにこれを 2 乗すると，

$$\cancel{(x^2+y^2+f^2)^2} - 4f^2x^2 = 4\ell^4 + \cancel{(x^2+y^2+f^2)^2} - 4\ell^2(x^2+y^2+f^2) \tag{7}$$

より，

$$\ell^2(x^2+y^2+f^2) - f^2x^2 = \ell^4 \tag{8}$$

となるのでこれを整理して，

$$(\ell^2 - f^2)x^2 + \ell^2 y^2 = (\ell^2 - f^2)\ell^2 \tag{9}$$

が得られる．ここで (2) 式において，$x = -f$ と置くと，

$$\sqrt{(-f-f)^2 + y^2} \pm \sqrt{[-f-(-f)]^2 + y^2} = \sqrt{[(2f)]^2 + y^2} \pm |y| = 2\ell \tag{10}$$

より，楕円の場合，

$$2f < \sqrt{[(2f)]^2 + y^2} + |y| = 2\ell \tag{11}$$

だから $f < \ell$ となる．従って，(9) 式の両辺を $\ell^2(\ell^2 - f^2)$ で割ってやると，

$$\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{y^2}{(\ell^2 - f^2)} = 1 \tag{12}$$

より，長径を a，短径を b とすると，

$$a = \ell,\ b = \sqrt{\ell^2 - f^2},\ f = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{13}$$

を得る．一方，双曲線の場合，(10) 式の符号がマイナスの場合だから，三角不等式より，

$$2f > \sqrt{(2f)^2 + y^2} - y^2 = 2\ell \tag{14}$$

だから，$f > \ell$ である．従って，(9) 式の両辺を $-\ell^2(f^2 - \ell^2)$ で割ってやると，

$$\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{y^2}{(f^2 - \ell^2)} = 1 \tag{15}$$

が得られる．これより，

$$a = \ell,\ b = \sqrt{f^2 - \ell^2},\ f = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{16}$$

が成り立つ．　なお，(1) 式の左辺の引くほうと引かれるほうを反転させた場合についても全く同じ式が成り立つので，(15) 式は両側の双曲線を表すことが分かる．□

離心率

定義 0.1. 次の式によって定義される e を離心率と呼ぶ．

$$f \equiv ae \tag{17}$$

この定義より，離心率は楕円の場合でも双曲線の場合でも，曲線がどれだけ焦点から離れているのかを表す量であることが分かる．いま，楕円の場合を，

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \qquad \therefore \quad f = a_1 e_1 \tag{18}$$

双曲線の場合を，

$$\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \qquad \therefore \quad f = a_2 e_2 \tag{19}$$

と置くと，(1) 式において $y = 0$ と置くことにより，$x = \pm a$ となる．従って，(2) 式により，

$$r_1 \pm r_2 = 2\ell = 2a \tag{20}$$

が成り立つので，今の場合楕円については，

$$r_1 + r_2 = 2a_1 = 2a/e_1, \tag{21}$$

双曲線については，

$$r_1 - r_2 = 2a_2 = 2a/e_2, \tag{22}$$

が成り立つことが分かる．

楕円体座標

式 (21) と式 (22) はそれぞれ $2a$ で割ってやると，

$$\xi \equiv \frac{r_1 + r_2}{2a} = \frac{1}{e_1}, \eta \equiv \frac{r_1 - r_2}{2a} = \frac{1}{e_2}, \tag{23}$$

のように，それぞれ離心率 e_1, e_2 の逆数になる．2 次元を表すのにはちょうど 2 つの自由度のパラメータが必要充分であるが，上で定義した ξ と η はその条件を満たしているので平面上の 1 点を表せそうである．実際，平面上の任意の 1 点 $P(x, y)$ は ξ 一定の楕円と η 一定の双曲線の交点として表すことができる．このことは次のように示される:

いま，離心率 e_1 及び e_2 の定義より，

$$0 < e_1 \leq 1, \tag{24}$$

$$1 \leq e_2 < \infty \text{ または, } -\infty < e_2 \leq 1, \tag{25}$$

だから,

$$1 \leq \xi < \infty, \tag{26}$$
$$-1 \leq \eta \leq 1 \text{ かつ} \eta \neq 0, \tag{27}$$

となるが，ここで今 $\eta = 0$ のいくらでも近くに解が存在するので，$\eta = 0$ も解に含めてよい．そこで，(13)，(18)，及び，(16)，(19)，より，

$$a_1 = \frac{f}{e_1} = \ell, \qquad b_1 = \sqrt{\ell^2 - f^2} = f\sqrt{\xi^2 - 1}, \tag{28}$$
$$a_2 = \frac{f}{e_2} = \ell, \qquad b_2 = \sqrt{f^2 - \ell^2} = f\sqrt{1 - \eta^2}, \tag{29}$$

となるから,

$$\frac{x^2}{f^2\xi^2} + \frac{y^2}{f^2(\xi^2 - 1)} = 1, \tag{30}$$
$$\frac{x^2}{f^2\eta^2} - \frac{y^2}{f^2(1 - \eta^2} = 1, \tag{31}$$

が成り立つ．これより，(30) 式の両辺に $f^2\xi^2(\xi^2 - 1)$ を掛けると，

$$(\xi^2 - 1)x^2 + \xi^2 y^2 = f^2\xi^2(\xi^2 - 1), \tag{32}$$

また，(31) 式の両辺に $f^2\eta^2(1 - \eta^2)$ を掛けると，

$$(1 - \eta^2)x^2 - \eta^2 y^2 = f^2\eta^2(1 - \eta^2), \tag{33}$$

が得られるので，(32) 式 $\times\eta^2$+(33) 式 $\times\xi^2$ より，

$$(\xi^2 - \eta^2)x^2 = f^2\xi^2\eta^2(\xi^2 - \eta^2) \tag{34}$$

より,

$$x = \pm f\xi\eta, \tag{35}$$

が得られ，これを (30) 式に代入すると，

$$\eta^2 + \frac{y^2}{f^2(\xi^2 - 1)} = 1, \tag{36}$$

より,

$$y = \pm f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{37}$$

が得られる.

回転楕円体座標

さて，前節で導いた楕円体座標を用いれば簡単に回転楕円体座標が得られる．
(35)，(37) 式より，

$$x = \pm f\xi\eta, \tag{38}$$
$$y = \pm f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{39}$$

が得られたが，これは,

$$1 \leq \xi < \infty, \tag{40}$$
$$-1 \leq \eta \leq 1, \tag{41}$$

に注意すると，候補となる解が，

$$x = f\xi\eta, \tag{42}$$
$$y = \pm f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{43}$$

と

$$x = -f\xi\eta, \tag{44}$$
$$y = \pm f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{45}$$

の 2 つが混ざった状態の解である．当然どちらも解になるわけだが，ここではより簡単な，(42)，(43) 式を基にして回転楕円体座標を求めよう．いま，この座標系を x 軸を中心として回転させれば，回転角 φ と x 軸からの距離 r によって x 成分以外が求まることになる．従って，(43) 式は回転楕円体座標ではプラスの項の y を r に変えたものでよい．従って，φ を $y-z$ 平面内をプラスに進む角度と定義すると，

$$x = f\xi\eta, \tag{46}$$
$$r = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{47}$$

より，この座標を 3 次元デカルト座標で表すと，

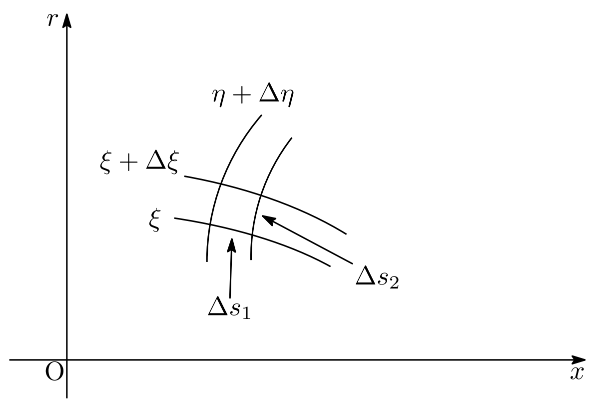
$$x = f\xi\eta, \tag{48}$$
$$y = r\sin\varphi, \tag{49}$$
$$z = r\cos\varphi, \tag{50}$$
$$r = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \tag{51}$$

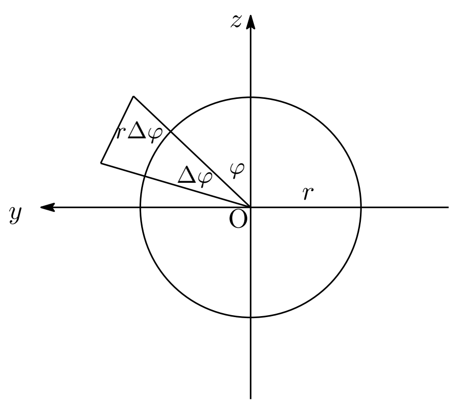
と表せることになる．但し，

$$1 \le \xi < \infty, \tag{52}$$
$$-1 \le \eta \le 1, \tag{53}$$

である．

回転楕円体座標の体積切片





上の図より体積素片は，

$$dv = ds_1 ds_2 r d\varphi \tag{54}$$

と表されるので，

$$\Delta s_1 = \sqrt{[x(\xi,\, \eta+\Delta\eta) - x(\xi,\, \eta)]^2 + [r(\xi,\, \eta+\Delta\eta) - r(\xi,\, \eta)]^2} \tag{55}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{x(\xi,\, \eta+\Delta\eta) - x(\xi,\, \eta)}{\Delta\eta}\right]^2 \Delta\eta^2 + \left[\frac{r(\xi,\, \eta+\Delta\eta) - r(\xi,\, \eta)}{\Delta\eta}\right]^2 \Delta\eta^2} \tag{56}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 \Delta\eta^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\eta}\right)^2 \Delta\eta^2} \tag{57}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\eta}\right)^2}\Delta\eta \tag{58}$$

全く同様にして，

$$\Delta s_2 = \sqrt{[x(\xi+\Delta\xi,\, \eta) - x(\xi,\, \eta)]^2 + [r(\xi+\Delta\xi,\, \eta) - r(\xi,\, \eta)]^2} \tag{59}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{x(\xi+\Delta\xi,\, \eta) - x(\xi,\, \eta)}{\Delta\xi}\right]^2 \Delta\xi^2 + \left[\frac{r(\xi+\Delta\xi,\, \eta) - r(\xi,\, \eta)}{\Delta\xi}\right]^2 \Delta\xi^2} \tag{60}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 \Delta\xi^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\right)^2 \Delta\xi^2} \tag{61}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\right)^2}\Delta\xi \tag{62}$$

が得られるので，(46)，(47) 式より，

$$\frac{\partial x}{\partial\xi} = f\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial\eta} = f\xi, \tag{63}$$

$$\frac{\partial r}{\partial\xi} = \frac{f\xi(1-\eta^2)}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} = f\xi\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial\eta} = -\frac{f\eta(\xi^2-1)}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} = -f\eta\sqrt{\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}} \tag{64}$$

よってこれを (58)，(62) 式に代入すると，

$$\Delta s_1 = \sqrt{(f\xi)^2 + \left(-f\eta\sqrt{\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}}\right)^2}\Delta\eta = f\sqrt{\xi^2 + \frac{\eta^2(\xi^2-1)}{1-\eta^2}}\Delta\eta = f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}}\Delta\eta \tag{65}$$

及び，

$$\Delta s_2 = \sqrt{(f\eta)^2 + \left(f\xi\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\right)^2}\Delta\xi = f\sqrt{\eta^2 + \frac{\xi^2(1-\eta^2)}{\xi^2-1}}\Delta\xi = f\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}\Delta\xi \tag{66}$$

を得る．従ってこれより，体積素片 dv は，

$$dv = ds_1 ds_2 r d\varphi \tag{67}$$

$$= f^2 \frac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} r d\xi d\eta d\varphi \tag{68}$$

$$= f^3 \frac{\xi^2-\eta^2}{f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}} r d\xi d\eta d\varphi \tag{69}$$

$$= f^3(\xi^2-\eta^2) d\xi d\eta d\varphi \tag{70}$$

となる．なお，それぞれの変数の変域は，

$$1 \le \xi < \infty, \tag{71}$$

$$-1 \le \eta \le 1, \tag{72}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{73}$$

である．