物理学 Tips

次元 (単位) について

よく知られているように異なる次元の物理量同士は足したり引いたり出来ない．掛けたり割ったりなら出来る．このことは 3 メートルと 5 キログラムを足せないのような例を考えれば当たり前のようであるが，このことから直ちに次のことが言える:

$$x^2 + x \tag{0.1}$$

の x の部分に例えば x メートル (m) と考えてみると，

$$(x\mathrm{m})^2 + x\mathrm{m} = x^2\mathrm{m}^2 + x\mathrm{m}??? \tag{0.2}$$

このように x が次元のある量だったら，$x^2 + x$ は単位がそろわず，従って足すことは出来ない．このことは一般化して,x の多項式が異なる次数を含むなら x は無次元量で無ければならないと一般化できる．となると，無限級数で展開される，

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \log x,\ \cdots, \tag{0.3}$$

などが物理の数式で現れたら，その部分は全て無次元量，例えば温度と温度の商 T_1/T_2 などの形でしか現れることは出来ないこともいえる．

⋯ こんな当たり前なことからも，計算結果が間違っているかどうかを簡単に判断する材料になっているね！

お仕舞い

$\nabla \boldsymbol{A}$ について

∇ 記号の使い方には大きく分けて 3 通りある:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi, \tag{0.4}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \tag{0.5}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{0.6}$$

このうち，div と rot は，計算の複雑さを別とすれば，定義自体をあまり悩むことは無いだろう．問題は grad である．スカラー場 ϕ の場合は単に，

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{0.7}$$

とすればよいのは明らかだが，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の場合はどうすればよいのか？実はこの場合も単に，

$$\nabla\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}, \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}, \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\right) \tag{0.8}$$

とすればよい．この定義を用いれば，次のような公式を表現することもできる:

$$\boldsymbol{U} \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{U} \cdot (\nabla\boldsymbol{V}) - (\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} \tag{0.9}$$

注意が必要なのは，スカラー場 ϕ に対しては，

$$\boldsymbol{U} \cdot \nabla\phi = U_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + U_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + U_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{0.10}$$

であるのに対し，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対しては，例えばその x 成分は，

$$\boldsymbol{U} \cdot \nabla\boldsymbol{A}\text{の } x \text{ 成分} = U_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + U_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + U_z\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{0.11}$$

となり全く形が変わることである．