1.1 仕事と運動エネルギー

運動方程式

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i \qquad (1 \le i \le n)$$

より

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \qquad (1 \le i \le n) \\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2\right) &= \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ \therefore \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_2) - \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i dt \\ &= \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \end{aligned}$$

よって、

$$\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_2) - \sum_{1\le i\le n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_1) = \sum_{1\le i\le n}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

叉は

$$\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_1) + \sum_{1\le i\le n}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum_{1\le i\le n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2(t_2)$$

つまり仕事は運動エネルギーを変化させることがわかる。特に力が保存力の場合、ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)$ から、

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i U$$

の関係によって与えられる。（但し ∇_i は i 番目の質点の座標に関するナブラ記号とする。）すると、

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \quad \boldsymbol{F}_i &= -\nabla_i U \\ \therefore m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \quad \boldsymbol{F}_i &= -\nabla_i U \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ \therefore \sum_{1\le i\le n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i &= -\sum_{1\le i\le n}\nabla_i U \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, (r)_n) = \sum_{1\le i\le n}(\nabla_i) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

だから、

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2 + U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n)\right] = 0$$

となり、これは、運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギー ＝ 一定を示し、力学的エネルギー保存則を意味する。