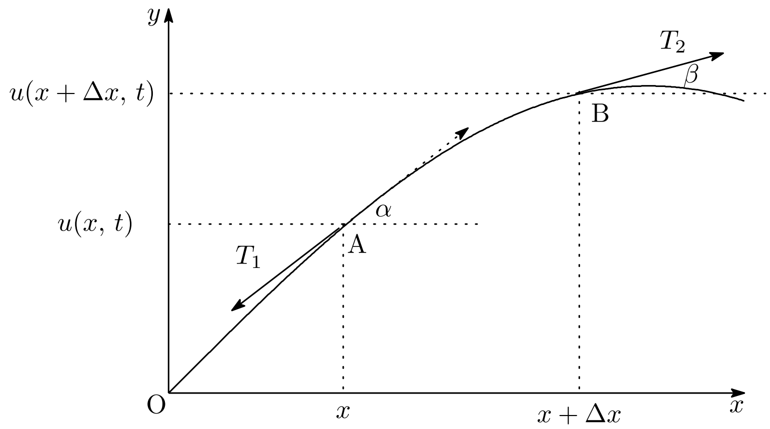
1　弦を伝わる横波の微分方程式 (＝波動方程式) について



上の図のように，水平方向に張力 T で強く張った弦を考える．波が無いときの弦の線密度を ρ とし，弦の運動方向が y 軸方向のみとするとき，この弦を走る横波の満たす微分方程式を導こう．

図の中で，弦の変位の関数を $u(x,\, t)$ と置くとき，点 A と点 A に非常に近い点 B を考える．いま，弦は水平方向には運動しないのだから，A 点と B 点の水平方向の張力は等しい．また，弦は充分強く張っているので，弦の変位が小さいとき，弦に波が走っているときでも水平方向の張力は殆ど変わらず T のままであると考えて問題ない．これより，

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T \tag{1.1}$$

が成り立つ．いま，弦の垂直方向の運動は運動方程式を満たすから，これを手がかりに弦を伝わる波動の満たすべき微分方程式を見つけよう．運動方程式の右辺はこの点 A，B 間での質量と加速度の積となり，弦の線密度は波が無いとき ρ であるからもし波が無ければ，A，B 間の弦の質量は $\rho \times \Delta x$ である．ところが実はたとえ弦が振動していても A，B 間の弦の質量は全く同じ $\rho\Delta x$ であるとして問題は無い．というのも，波が走っているとき，A，B 間の弦は"伸びて"しまっているが，運動方向が y 軸方向のみだから，x 軸方向の同じ長さの区間中の弦の重さは常に一定だからである．従って，A，B 間の弦の質量は $\rho\Delta x$ である．弦の変位は $u(x,\, t)$ だから，変位の加速度がこの区間にかかる力と比例する．従って，運動方程式の右辺はそれらを掛け合わせた，

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

で表される．一方この区間に掛かる力は，B 点での垂直成分の張力から A 点での垂直成分の力を引いたもので表せるから，

$$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha \tag{1.3}$$

となる．従って運動方程式は，

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

ここでこの式の両辺を T で割ってやると，式 (1.1) より，

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

つまり，

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

となる．ここで $\tan\alpha$ とは点 A での弦の接線の傾きであり，同様に $\tan\beta$ は点 B での弦の接線の傾きだから，

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\partial u(x+\Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x} \tag{1.7}$$

が成り立つので，運動方程式 (1.6) は，

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x} = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

となる．ここで両辺を Δx で割ってやって，$\Delta x \to 0$ とすると，左辺は $\dfrac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}$ の x での偏微分の定義に等しくなるので (1.8) 式は,

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

となる．これが弦を伝わる横波の満たす微分方程式で波動方程式と呼ばれる．ここで実はこの微分方程式の解は, f, g を任意の関数として,

$$u(x,\,t) = f\left(x - \sqrt{\tfrac{T}{\rho}}t\right) + g\left(x + \sqrt{\tfrac{T}{\rho}}t\right) \tag{1.10}$$

の形をしており，これは速度 $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ で x 軸正の方向に進む横波 f と逆に負の方向に進む横波 g の和で表せているので．式 (1.9) は,

$$v \equiv \sqrt{\tfrac{T}{\rho}} \tag{1.11}$$

と置いて,

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

のように表すことが出来る．これが 1 次元の (古典的波の) 波動方程式の一般形である．なお，ここでは詳しく説明しないが，式 (1.12) の解が,

$$u(x,\,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{1.13}$$

となることは，単純に式 (1.12) に式 (1.13) を代入することによっても確かめられる: 実際,

$$X_+ \equiv x - vt, \qquad X_- \equiv x + vt, \tag{1.14}$$

と置くと,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d{X_+}^2} + \frac{d^2 g}{d{X_-}^2}, \tag{1.15}$$

一方右辺は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-v\frac{d}{dX_+}f(x - vt) + v\frac{d}{dX_-}g(x + vt)\Big) = v^2\frac{d^2}{d{X_+}^2}f(x - vt) + v^2\frac{d^2}{d{X_-}^2}g(x + vt) \tag{1.16}$$

より確かに波動方程式 (1.12) の解になっている．