ポテンシャルについて

力 $\boldsymbol{F}$ が、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

で与えられるとき、U をポテンシャルエネルギーと呼ぶ。叉このような力に対しては、力学的エネルギー保存則が成り立つので、保存力とも呼ばれる。
力 $\boldsymbol{F}$ は、

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U, \quad \boldsymbol{F} = -gradU, \quad \boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}},$$

等とも表記される。叉一般に、

$$\frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n) = \sum_{1\le i\le n} \nabla_i U \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

が成り立つ。但し、∇_i は i 番目の質点の座標に対するナブラである。

$$\begin{aligned}
\because \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}_i, \cdots, \boldsymbol{r}_n) &= \sum_{1\le i\le n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\boldsymbol{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y_i}{\partial t}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z_i}{\partial t}\boldsymbol{k} \right) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \nabla_i U \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \qquad \Box
\end{aligned}$$

特に、$U(\boldsymbol{r}) = U(r)$ の場合、つまり $U(\boldsymbol{r})$ が中心力の場合、

$$\nabla U(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

が成り立つ。
$\because r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ より、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

だから、

$$\begin{aligned}
\nabla U(r) &= \frac{\partial U(r)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U(r)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U(r)}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k} \right) \frac{\partial U(r)}{\partial r} \\
&= \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} \qquad \Box
\end{aligned}$$