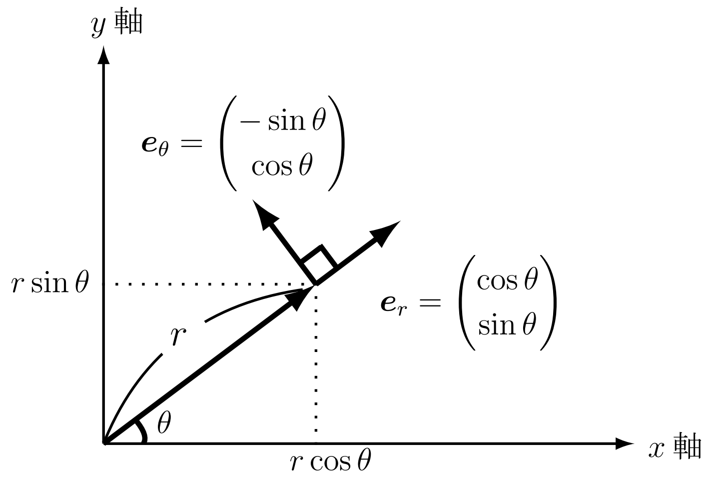
位置・速度・加速度の極座標表示



上の図で，図のように動径方向の基底 $\boldsymbol{e}_r$ と方位角方向の基底 $\boldsymbol{e}_\theta$ が取れるから，時間 t で随時微分して，

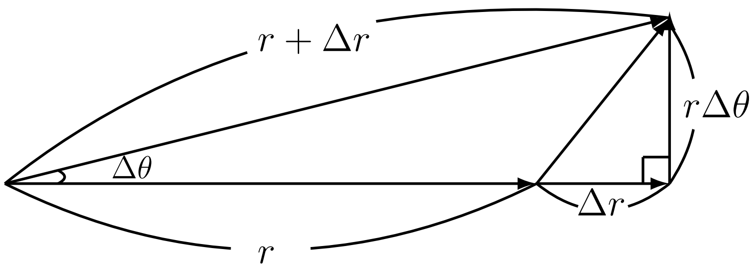
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta \\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta \end{pmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

が得られる．

または厳密性には欠けるが次のようにしても良い．下の図で $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ であるが，



微小時間 Δt の間に，1 次の精度で動径方向は，Δr 増加し，方位角方向は $r\Delta\theta$ 増加する．従って，合わせると Δt の間に位置ベクトルは，

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta r\boldsymbol{e}_r + r\Delta\theta\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1}$$

増加することになる．従って，これを Δt で割って，

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\theta = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{2}$$

が得られる．加速度についてはこの方法だと筆者には図形的に大変そうなのでここではやらない．興味のある方はご自身で試されるとよいかもしれない．