0.1　ニュートン力学的重力場の方程式

一般相対論的重力場の方程式である，いわゆるアインシュタイン方程式を導く準備として，ニュートン力学的重力場の方程式について軽く説明しておこう．ニュートン力学的重力場の式は，次のようなポアソン方程式によって表される:

$$\Delta\phi_G = \nabla^2\phi_G = 4\pi G\rho \tag{1}$$

この式で，ϕ_G は重力ポテンシャルで，ρ は質量密度である．この式についてよく知らない読者でも次の万有引力の式なら知っているだろう:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{2}$$

実はこの万有引力の式 (2) はポアソン方程式 (1) の特殊な場合の解であり，一般的には式 (1) がニュートン力学的重力場の方程式となる．(2) 式しか知らない読者のために，念の為に (1) から (2) を導いておこう．まず一般に力の場 $\boldsymbol{E}$ とポテンシャル ϕ の関係は,

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi \tag{3}$$

によって与えられる．これは直感的にはポテンシャルを山の高さ，単位質点に働く力を山の斜面の傾きと考えるとイメージしやすい．この図のように

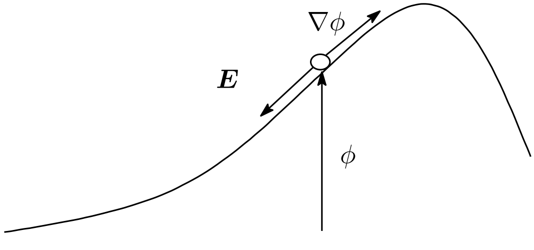

図 1: ポテンシャル図

ポテンシャルは山と斜面の関係と一致するように定義されているため，力の働く向きが，山の勾配と逆向きになるように負号をつけて定義される．ただし注意すべきはこの図は z 軸方向に山のポテンシャルが描かれているが，実際の三次元の空間内の場のポテンシャルはこのように図に描くことはできない．実際のポテンシャルの図は 1 つ次元が上がることに注意しよう．

さて，

$$\nabla\phi_G = -\boldsymbol{E}_G$$

を式 (1) に代入すると次を得る:

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{E}_G = 4\pi G\rho \tag{4}$$

ここでいま，質点に対する万有引力の法則の式 (2) を導きたいのだから，右辺の質量密度は原点で質量 M があるものとする．式で書くと，任意の原点を含む体積 V で，

$$\int_V \rho dv = M$$

となっているとする[*1]．すると，原点を中心とする半径 r の球殻 V 内で (4) の体積積分を行うと，右辺は，

$$\int_V 4\pi G\rho dv = 4\pi GM$$

となり，左辺は，体積積分を表面積分に変えるガウスの発散定理を用いることにより，

$$-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}_G dv = -\int_{\partial V}\boldsymbol{E}_G\cdot\boldsymbol{n}ds = -\int_{\partial V}E_G ds = -4\pi r^2 E_G$$

が得られる．ただし電荷が原点にあるだけであることより，重力場の球対称性が明らかなので，球殻の表面 ∂V での重力場の大きさ E_G を $\boldsymbol{E}_G = E_G\boldsymbol{n}$

[*1] デルタ関数を用いれば，$\rho = M\delta(\boldsymbol{r})$ である

によって定義した．これにより，

$$-4\pi r^2 E_G = 4\pi GM$$

すなわち，

$$E_G = -\frac{GM}{r^2}$$

が得られた．これは重力場についての式なので，質点に対する万有引力の公式にするために両辺に m をかけてやれば，

$$F = mE_G = -\frac{GMm}{r^2}$$

が得られた．この式は原点から外向きを正とした場合に，質点 m に対する力の働く向きまで入っていることを除けば，万有引力の公式 (2) と全く同じである．(1) 式から (2) が導かれたので，(1) 式は万有引力の法則の式を含んだより一般的な重力場の方程式であることがわかる[*2]

[*2] この関係はマクスウェル方程式のガウスの式 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ とクーロンの法則 $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{r^2}$ との間の関係とほとんど一緒である．ガウスの式もスカラーポテンシャルを用いればポアソン方程式になる．違いは 4π が現れるかどうかであるが，これは有理単位系を用いるかどうかの差による．