2.1　力のモーメントと角運動量

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} \boldsymbol{F}_{ij}$$

より、

$$\sum_{1\le i\le n} m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{1\le i\le n}\sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le n}\sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} &= \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ j<i}} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ j>i}} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} \\
&= \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ j<i}} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ i<j}} \boldsymbol{r}_j \times (-\boldsymbol{F}_{ij}) \\
&= \sum_{\substack{1\le i,j\le n \\ j<i}} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

より、

$$\sum_{1\le i\le n} m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

が得られる。一方全角運動量は、

$$\boldsymbol{L} = \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{1\le i\le n} (\boldsymbol{r}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

より、t で微分すると、

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}} &= \sum_{1\le i\le n} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) + \sum_{1\le i\le n} m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i \\
&= \sum_{1\le i\le n} m_i\boldsymbol{r}_i \times \ddot{\boldsymbol{r}}_i
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{N} = \sum_{1\le i\le n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$$

と置けば、

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}$$

が成り立つ。これは、**質点系の原点 O に関する全角運動量の時間微分は、各質点に働く外力の点 O に関するモーメントに等しい。**ことを表している。特に外力が働かないとき全角運動量は保存する。これを角運動量保存則と呼ぶ。