0.1　力積と運動量

n 個の質点からなる質点系を考える。各 i 番目の質点に対して、

- m_i : 質量
- $\boldsymbol{r}_i$: 位置
- $\boldsymbol{F}_i$: 外力
- $\boldsymbol{F}_{ij}$: j 番目の質点から受ける力 (= 内力)

とすると運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1n} \\
&m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2n} \\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
&m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} \boldsymbol{F}_{ij} \\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
&m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_{n1} + \cdots + \boldsymbol{F}_{nn-1}
\end{aligned}
$$

となる。これより、

$$
\sum_{1\le i\le n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{1\le i\le n} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne i}} \boldsymbol{F}_{ij}
$$

を得るが、作用反作用の法則より、$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$ だから、

$$
\sum_{1\le i\le n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{F}_i
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sum_{1\le i\le n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{1\le i\le n} \boldsymbol{F}_i dt \\
\therefore \sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_2) - \sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_1) &= \sum_{1\le i\le n} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i dt
\end{aligned}
$$

叉は

$$
\sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_1) \quad + \sum_{1\le i\le n} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i dt = \sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_2)
$$

つまり、外力による力積は運動量を変化させることがわかる。特に外力がない場合、

$$
\sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_1) \quad = \sum_{1\le i\le n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t_2)
$$

が成り立つ。これを運動量保存則と呼ぶ。