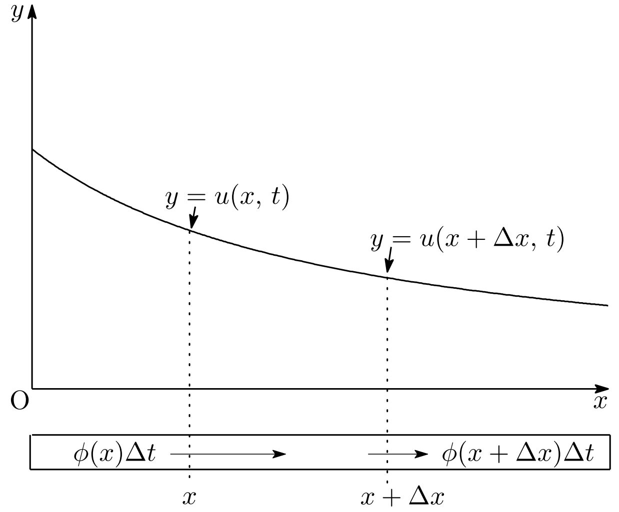
線を伝わる熱の熱伝導方程式を導く



上の図のように金属などの線状の物体を熱が伝わるときの熱伝導方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{0.1}$$

を導こう.

まず，この熱導体の熱容量 ρ を定義しよう．熱容量 ρ は単位長さ当たりに単位温度分だけ温度を上げるのに必要な熱量をいう．この定義から SI 単位系を使用すれば熱容量の次元は J/m·K となる．いまこの線状熱導体の温度の分布を表す関数を $y = u(x,\, t)$ とすれば，t から $t + \Delta t$ の時間の間に x から $x + \Delta x$ の区間に流入する熱量 ΔQ は,

$$加えられた熱量 = 熱容量 \times 区間幅 \times (時刻\ \mathrm{t}\ + \Delta t\ での温度 - 時刻\ \mathrm{t}\ での温度), \tag{0.2}$$

だから,

$$\Delta Q = \rho\Delta x(u(x,\, t + \Delta t) - u(x,\, t)) \tag{0.3}$$

となる．一方，単位時間当たりに流れ込む熱量を熱流と呼び，$\phi(x)$ で表すと，温度勾配に比例し，かつ温度勾配が単調減少の場合は正の流れ込む熱量を持つから,

$$\phi(x) = -\kappa\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \kappa > 0, \tag{0.4}$$

と表すことが出来る．熱流は定義より J/s の次元を持ち，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ が K/m の次元を持つのだから，熱伝導係数 κ の次元は J·K/m·s の次元を持つ.

ここで先ほどと同じように t から $t + \Delta t$ の間に区間 x から $x + \Delta x$ に流れ込む熱量を考えると,

$$加えられた熱量 = x\ に流れ込む熱量 - x + \Delta x\ に流れ込む熱量, \tag{0.5}$$

だから,

$$\Delta Q = \phi(x)\Delta t - \phi(x + \Delta x)\Delta t, \tag{0.6}$$

で表せる．従って，(0.4) 式を当てはめると上の式は,

$$\Delta Q = -\kappa\frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x}\Delta t + \kappa\frac{\partial u(x + \Delta x,\, t)}{\partial x}\Delta t = \kappa\Delta t\left(\frac{\partial u(x + \Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x}\right), \tag{0.7}$$

となる．これより (0.3) と (0.7) で等式を立てると,

$$\Delta Q = \rho\Delta x(u(x,\, t + \Delta t) - u(x,\, t)) = \kappa\Delta t\left(\frac{\partial u(x + \Delta x,\, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\, t)}{\partial x}\right), \tag{0.8}$$

が得られるので，両辺を $\Delta x\Delta t$ で割ってやって，$\Delta x,\ \Delta t \to 0$ とすれば,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{0.9}$$

を得る．従って，$D \equiv \kappa/\rho$ と置けば，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{0.10}$$

を得る．これが 1 次元の熱伝導方程式である．なお初期条件としては，

$$u(x, 0) = f(x), \tag{0.11}$$

を与えればよい．