定数係数線形微分方程式の一般解について

定数係数線形微分方程式についてはその解について充分詳しく知られている．しかし，簡単な微分方程式の本などでは，それが充分に一般解になっているということについては，あまりにも明らかなためか，説明されていないことが多い．そこで今回，その点について書いてみることにする．

最初のほうの結論や証明はあまりにも明らかでくだらなく感じるかもしれない．が，念のため一応書いておく．

補題 0.1 (定数関数とその微分)**.**

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow x = C \tag{1}$$

これはあまりにも明らかと感じることだろうが，このことはより一般化すると，x と従属関係にある変数さえ現れなければ，右辺の任意定数 C はなんでもよいということを意味する．従って次の系が成り立つ:

系 0.2 (独立な変数による偏微分)**.** $u = u(x,\, y)$ とし，x と y を独立な変数とする．このとき任意の関数 $F = F(x)$ に対して，

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow u(x,\, y) = F(x) \tag{2}$$

が成り立つ．

そこでこの補題を自明なものとして，これを用いて次の一階定数係数線形偏微分方程式の一般解を導いていこう．

定理 0.3.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \alpha\Psi = 0 \Leftrightarrow \Psi(\boldsymbol{r},\, t) = F(\boldsymbol{r})e^{\alpha t} \tag{3}$$

証明. この偏微分方程式は，もし $\Psi(\boldsymbol{r},\, t) = e^{\alpha t}$ だとすれば，容易に条件を満たすことが分かる．そこで $\boldsymbol{r}$ と t の任意の関数として，

$$\Psi(\boldsymbol{r},\, t) = \varphi(\boldsymbol{r},\, t)e^{\alpha t} \tag{4}$$

と置いてみよう．この式は，$e^{\alpha t}$ が明示的に現れ，かつ任意の $\boldsymbol{r}$ と t の関数を表すものとしてもっとも単純な形をしている．[1]　いま，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(\boldsymbol{r},\, t)e^{\alpha t}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}e^{\alpha t} + \varphi \times \alpha e^{\alpha t} \tag{5}$$

だから，与えられた偏微分方程式は，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \alpha\Psi = e^{\alpha t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \alpha\varphi e^{\alpha t} - \alpha\varphi e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

となり，結局偏微分方程式，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

に落ち着くことになる．ここで系 0.2 より，この偏微分方程式の解は, 任意関数 $F(\boldsymbol{r})$ になるから，

$$\varphi(\boldsymbol{r},\, t) = F(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

となる．よって元の偏微分方程式の解は，$F(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{r}$ を変数とする任意関数として，

$$\Psi(\boldsymbol{r},\, t) = F(\boldsymbol{r})e^{\alpha t} \tag{9}$$

が一般解となることが分かった． □

[1] 何故なら $F(\boldsymbol{r},\, t)$ を任意の関数とするとき，$\varphi(\boldsymbol{r},\, t) \equiv F(\boldsymbol{r},\, t)e^{-\alpha t}$ と置けば，$\varphi(\boldsymbol{r},\, t)e^{\alpha t} = F(\boldsymbol{r},\, t)$ となるから

定理 0.4 (波動方程式の一般解)**.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

の一般解は,

$$u(x,\ t) = F(x - vt) + G(x + vt) \tag{11}$$

である．但し，$F,\ G$ は任意の関数である．

証明. まず，元の微分方程式は微分を微分演算子としてみると次のように因数分解できる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x,\ t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,\ t) = 0 \tag{12}$$

ここで，$X^+ \equiv x - vt,\ X^- \equiv x + vt$ と変数変換しよう．すると，

$$\frac{\partial X^+}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial X^+}{\partial t} = -v, \tag{13}$$

$$\frac{\partial X^-}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial X^-}{\partial t} = v, \tag{14}$$

が成り立つから，偏微分の連鎖律より，任意の関数 $f = f(x,\ t)$ に対して，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X^+}\frac{\partial X^+}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial X^-}\frac{\partial X^-}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X^+} + \frac{\partial f}{\partial X^-}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X^+}\frac{\partial X^+}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X^-}\frac{\partial X^-}{\partial t} = v\frac{\partial f}{\partial X^+} - v\frac{\partial f}{\partial X^-}, \tag{16}$$

が得られるから，(12) 式の右辺の微分演算子は,

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X^+} + \frac{\partial}{\partial X^-} - \frac{1}{v}\left(v\frac{\partial}{\partial X^+} - v\frac{\partial}{\partial X^-}\right) = 2\frac{\partial}{\partial X^-}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X^+} + \frac{\partial}{\partial X^-} + \frac{1}{v}\left(v\frac{\partial}{\partial X^+} - v\frac{\partial}{\partial X^-}\right) = 2\frac{\partial}{\partial X^+}, \tag{18}$$

となるから，結局，波動方程式 (10) は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(2\frac{\partial}{\partial X^-}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial X^+}\right) u = 4\frac{\partial}{\partial X^-}\frac{\partial}{\partial X^+} u = 0 \tag{19}$$

という形に変形されることになる．但し，この座標変換により，u は X^+ と X^- の関数となっている．

従って，解くべき偏微分方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial X^-}\frac{\partial}{\partial X^+} u = 0 \tag{20}$$

となったわけだが，これは明らかに 1 階の偏微分方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial X^+} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X^-} = 0, \tag{22}$$

の解の線形結合のみで表せる．ここで，(21) 式の解は，系 0.2 より，任意関数を $F = F(X)$ として,

$$u(x,\ t) = F(X^+) = F(x - vt), \tag{23}$$

同様に (22) 式の解は，任意関数を G として,

$$u(x,\ t) = G(X^-) = G(x + vt), \tag{24}$$

と表せるから，一般解は，$F,\ G$ を任意関数として,

$$u(x,\ t) = F(x - vt) + G(x + vt) \tag{25}$$

と表されることになる．これが波動方程式 (10) の一般解である．なお，$X^+ \equiv x - vt,\ X^- \equiv x + vt$ と置いたのは，$F(X^+)$ が x 軸正の向きに進む解を表し，逆に $G(X^-)$ が負の方向に進む解だからである． □