

### 3.1 中心力と角運動量

外力が中心力しか働かない場合、角運動量が保存することを、次のようにして示すことが出来る。中心力の作るポテンシャル  $U(r)$  は、

$$U(\mathbf{r}) = U(r) \quad (\text{但し、} r = \|\mathbf{r}\|)$$

のように  $r = \|\mathbf{r}\|$  の関数として表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ &= \frac{\mathbf{P}}{m} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (-\nabla U(r)) \\ &= -\mathbf{r} \times \left( \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= -\mathbf{r} \times \left( \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right) \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= -\left( \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= \mathbf{0} \\ \therefore \dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって角運動量は保存する。