複素解析を使わずにsinc関数の$[0,\infty)$の定積分を求めてみる

まず、次の積分を求める。（但し$s>0$とする。）：

$$\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \left[-\frac{\sin\omega t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos\omega t e^{-st}dt = \frac{\omega}{s}\left[-\frac{\cos\omega t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt$$

$$\therefore \left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2}$$

よって、

$$\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$(for \quad \forall s>0)$$

ここで、上の等式は任意の$s>0$で成り立つから、

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

より、任意の$s\geq 0$で成り立つとしてよい。次に、

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\omega t}{t} = \omega$$

だから、

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dsdt = \int_0^\infty\left[-\frac{\sin\omega t}{t}e^{-st}\right]_0^\infty dt = \int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}dt$$

叉、

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dsdt = \int_0^\infty\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dtds = \int_0^\infty \frac{\omega}{s^2+\omega^2}ds = \int_{\tan^{-1}\frac{0}{\omega}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{(\omega\tan\theta)^2+\omega^2}(\omega\tan\theta)'d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{\omega^2\sin^2\theta+\omega^2\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

よって、

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

ここで$\sin\omega t$もtも共に奇関数だから、$\dfrac{\sin\omega t}{t}$は偶関数となる。よって、

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\omega t}{t}dt = 2\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}dt = \pi$$

が得られた。