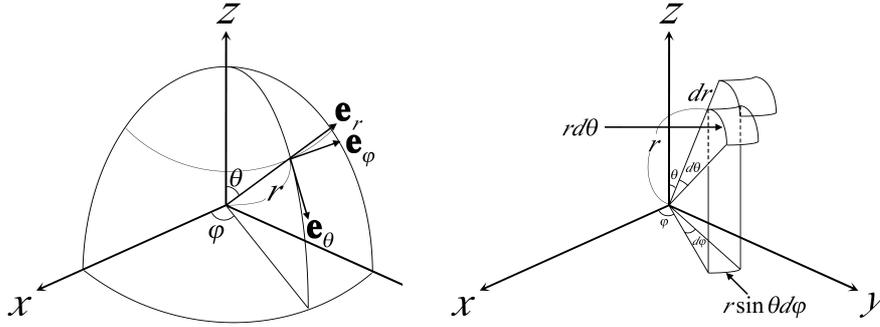


微分演算子の球座標変換の導出

ここでは一度覚えると便利で簡単な微分演算子の球座標変換を求める。下の図において、



$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi & dV &= dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi & dS_r &= r d\theta \times r \sin \theta d\varphi \\
 z &= r \cos \theta & dS_\theta &= dr \times r \sin \theta d\varphi \\
 & & dS_\varphi &= dr \times r d\theta
 \end{aligned}$$

が成り立っている。ここで r 方向の長さは dr 、 θ 方向の長さは $r d\theta$ 、 φ 方向の長さは、 $r \sin \theta$ だから、それぞれ割ってやると、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1)$$

が成り立っている。また、

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \frac{\partial}{\partial r} (A_r dS_r) dr + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta dS_\theta) d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi dS_\varphi) d\varphi \\
 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) dr d\theta d\varphi + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) dr d\theta d\varphi + r \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} dr d\theta d\varphi
 \end{aligned}$$

だから、両辺 dV で割って、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (2)$$

が成り立つ。よって今、

$$\mathbf{A} \equiv \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

と置き、(2) に代入することにより、

$$\nabla^2 \Psi = \nabla \cdot (\nabla \Psi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$$

が得られた。