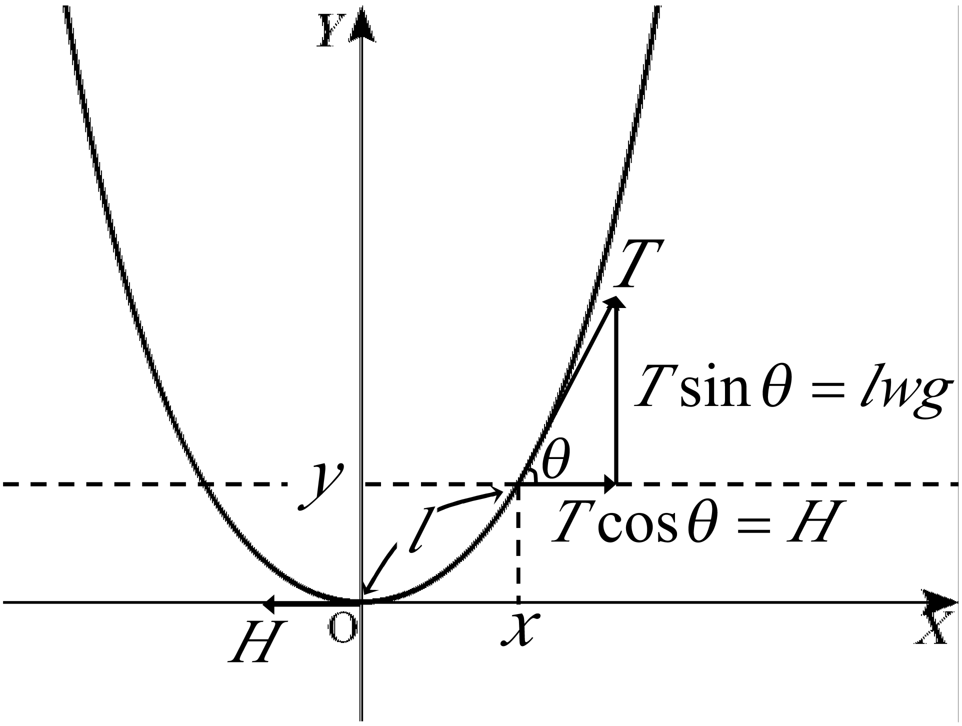
カテナリー（懸垂線）曲線の求め方

柔らかいロープなどを二点で吊ってできる曲線を, カテナリー（懸垂線）と呼びます. ここではカテナリーを力学を用いて導くことにします.



上の図を、ロープを左右から吊ってできる図を表すものとします. ロープが最も地面に近づく点を原点 $(X, Y) = (0, 0)$ にとると, このロープが作る曲線は Y 軸対象となるので, 以後簡単のため $x \geq 0$ の部分について議論することにする. このとき, 座標 $(X, Y) = (x, y)$ でのロープの状態を考ると, この点でロープに働く力はつりあっている. この点に働く力は,$(X, Y) = (x, y)$ と,$(X, Y) = (-x, y)$ の 2 点から吊っている場合と等しくなることに注意すると,

- H:原点での張力
- T:点 $(X, Y) = (x, y)$ での張力
- θ:点 $(X, Y) = (x, y)$ での張力が X 軸となす角
- w:ロープの線密度 $[kg/m]$
- l:原点から点 $(X, Y) = (x, y)$ までのロープの長さ

とすると,2 点 $(-x, y)$ および (x, y) に掛かる垂直方向の力は、その間のロープの重さに等しいから,$2lwg$ となる. 左右対称だから, それぞれに均等に力が加わるはずだから, 結局点 (x, y) における張力 T の垂直成分 $T\sin\theta$ は,lwg に等しくなる. よって,

$$T\sin\theta = lwg \tag{1}$$

また, 原点での力もつりあっており, その点より下側にロープがないことから, 原点での張力 H は水平成分のみとなり, それは点 (x, y) での張力の水平成分と等しいから,

$$T\cos\theta = H \tag{2}$$

ここで, 点 (x, y) において張力の向きは, ロープが描く曲線の接線方向を向いているはずだから,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \tag{3}$$

となる. 最後に, 曲線 $y = f(x)$ の x から 0 までの曲線の長さ l は,

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \tag{4}$$

となる. 以上から次のようにしてこのロープが作る曲線を求める. まず,(3) を (4) に代入して,

$$l = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + (\tan\theta)^2} dx = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} dx = \int_0^x \frac{1}{\cos\theta} dx$$

を得る.

$$l = \int_0^x \frac{1}{\cos\theta} dx \tag{5}$$

となるので,(5) の両辺を x で微分して,

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{\cos\theta} \tag{6}$$

を得る. 次に,(1) ÷ (2) より,

$$\tan\theta = \frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{lwg}{H} \tag{7}$$

となるので, 計算を簡単にするため $\alpha = \dfrac{wg}{H}$ と置くと,(7) は,

$$\tan\theta = \alpha l$$

となるので, 両辺を l で微分すると,

$$\alpha = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dl} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx}\frac{1}{\frac{dl}{dx}} = \frac{1}{\cos^2\theta}\cos\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dx} \quad (8)$$

よって,(8) の両辺を $X = x$ から $X = 0$ まで積分すると,

$$\alpha x = \int_0^x \alpha dx = \int_0^x \frac{1}{\cos\theta}\frac{d\theta}{dx}dx = \int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta}d\theta \quad (9)$$

(9) の右辺の積分を求めてみよう.

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \frac{1}{\cos\theta}d\theta &= \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}d\theta + \int_0^\theta \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\theta \frac{(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta} + \int_0^\theta \frac{-(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta}d\theta\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\ln|1+\sin\theta| - \ln|1-\sin\theta|\right\} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \\
&= \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}$$

これより,

$$\alpha x = \ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

となるから,

$$e^{\alpha x} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta \quad (10)$$

を得る. 一方,

$$e^{-\alpha x} = (e^{\alpha x})^{-1} = \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{-1} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\cos\theta\cdot(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \quad (11)$$

だから,((10) − (11)) ÷ 2 より,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

これより,

$$y=\int_0^x \frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}dx=\left[\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha}\right]_0^x=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha} \tag{12}$$

を得る. 以上より, 結局このロープが作る曲線の $x \geq 0$ の部分は (12) の形になることが分かった.$x<0$ の部分は, このロープが作る曲線が y 軸対称であることより,

$$x<0 \text{ のとき}, f(x)=f(-x) \text{ だから},$$
$$y=\frac{e^{\alpha(-x)}+e^{-\alpha(-x)}}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}$$

より,$x \geq 0$ の部分と同じ形となることが分かる. また, この曲線のカーブは, パラメータ α のみによって決まるため, 結局任意の x において,

$$y=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}$$

の曲線を描くことが分かる. この曲線をカテナリー（懸垂線）と呼ぶ. また $((10)+(11))\div 2$ より,

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}$$

が得られるから,$x \geq 0$ の範囲で,

$$l=\int_0^x \frac{1}{\cos\theta}dx=\int_0^x \frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}dx=\left[\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2\alpha}\right]_0^x=\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2\alpha}$$

となることも分かる.