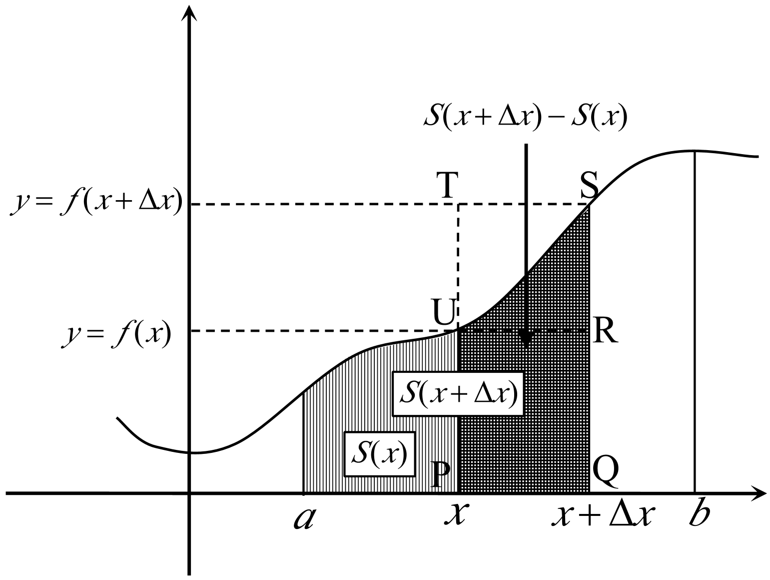
基礎再考〜なんで定積分で面積が求まるの？〜



上の図で, 関数 $y=f(x)$ を $(a,\ b)$ で定義された連続関数とするとき，関数 $y=f(x)$ と x 軸にはさまれる領域の a から x までの面積を $S(x)$ と置くとき,（当然 $S(a)=0$ になる.）Δx を十分小さく取れば，ある微小区間 $(x, x+\Delta x)$ において $f(x)$ は単調増加か, 単調減少となります. 上の図の場合は単調増加となっているので関数 $y=f(x)$, $x=x$, $x=x+\Delta x$, 及び x 軸で囲まれた部分の面積の大きさが長方形 PQST と PQRU の間である事より,

$$
\begin{aligned}
f(x)\Delta x \leq \quad & S(x+\Delta x)-S(x) \quad \leq f(x+\Delta x)\Delta x \\
\therefore f(x) \leq \quad & \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \quad \leq f(x+\Delta x)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます. この関係は，不等号を逆にすれば単調減少となる区間でも全く同様に成り立ちますから, 結局,

$$S'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

が成り立つ事になります. これより, 微分の逆演算で面積を表す関数 $S(x)$ が求められることが想像できます. それでは, 実際にある関数 $F(x)$ について $F'(x)=f(x)$ が分かっていたとしましょう. このとき, この $F(x)$ について,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

及び既に分かっている通り,

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

が成り立っています.（但し, 分かっている $F(x)$ はたまたま $S(x)$ そのものかも知れませんが.）このとき, $G(x) = S(x) - F(x)$ と置くと,

$$\begin{aligned}
G'(x) &= (S(x) - F(x))' \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(S(x+\Delta x) - F(x+\Delta x)) - (S(x) - F(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
&= S'(x) - F'(x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立ちますので $G(x) = S(x) - F(x)$ は任意の x で傾きが 0 のグラフ, つまり,

$$G(x) = C (\therefore S(x) = F(x) + C)$$

なる定数 C が存在します. すると,

$$\begin{aligned}
S(x) &= S(x) - S(a) \qquad (\because S(a) = 0) \\
&= \{F(x) + C\} - \{F(a) + C\} \\
&= F(x) - F(a)
\end{aligned}$$

となりますので, めでたく任意の原始関数を用いて定積分を実施すればよいことが示されました. これをインテグラルを用いて,

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

と表しているのです.