素数のべき乗根が無理数になることの証明

定理 0.1. $p \neq 1$ を素数，$q > 1$ を任意の自然数とする．このとき，$\sqrt[q]{p}$ は無理数である．

証明.
$\sqrt[q]{p}$ を有理数と仮定して矛盾を導く．

まず，$p > 1$ より，$\sqrt[q]{p}$ も 1 より大きい．$\sqrt[q]{p}$ がもし仮にある自然数 $n > 1$ になると仮定すると，

$$\sqrt[q]{p} = n$$

となる $n > 1$ が存在するから，この式の両辺を q 乗して，

$$p = n^q \tag{1}$$

と表されることになるが，これは p が素数であることに反する．従って，$\sqrt[q]{p}$ は，自然数ではない有理数であることになるが，このときお互いに素な自然数 m, n があって，

$$\sqrt[q]{p} = \frac{n}{m}$$

と表せる．従って，両辺を q 乗して，

$$p = \frac{n^q}{m^q}$$

従って，両辺に m^q を掛けると，

$$m^q p = n^q$$

ここで，この式の左辺は m^q が掛かっているから，明らかに m^q で割り切れる．従って n^q も m^q で割り切れることになる．これはつまり n が m で割り切れることを意味し，m と n がお互いに素なことに反する．従って，そもそも，$\sqrt[q]{p}$ が分数で表せるという仮定自体が間違っていたことになり，$\sqrt[q]{p}$ が無理数であることが示された．$\square$