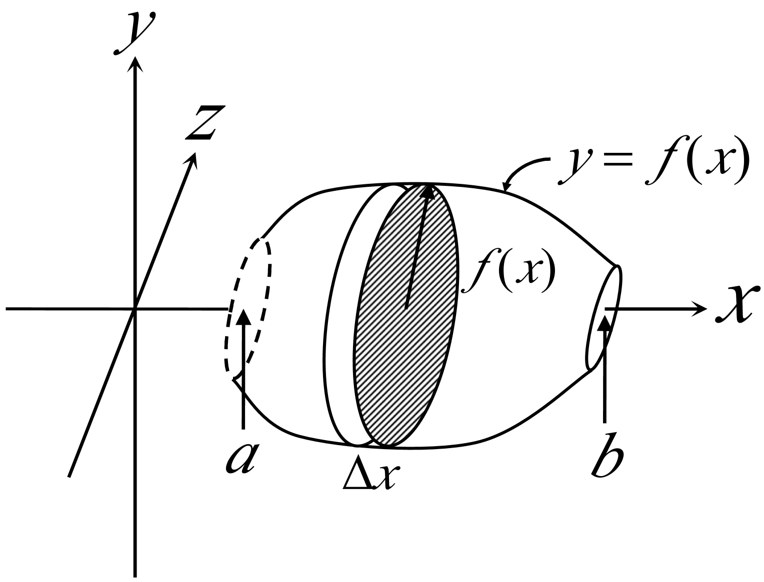
1　回転体の体積と側面積

1.1　回転体の体積

　まず最初に、$y = f(x)$ を x 軸を中心に回転させてできる図形の、a から b までの体積 V を求めてみよう.

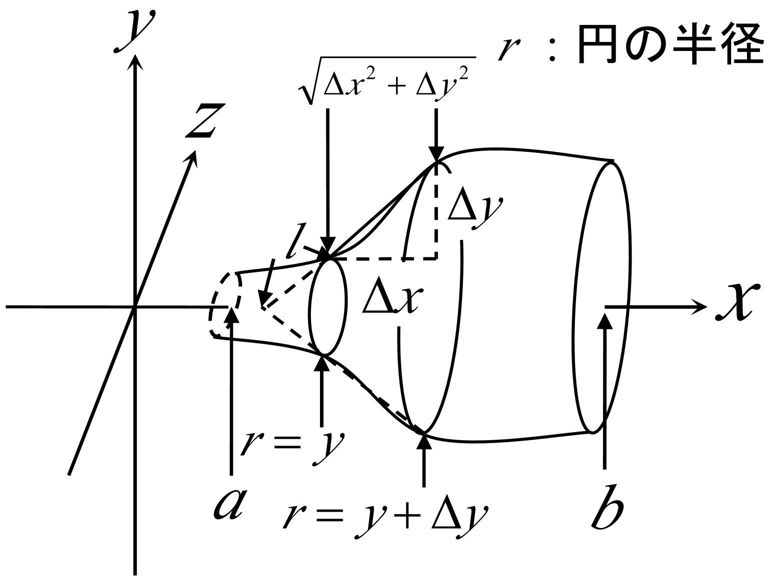


上の図において、この物体の x 座標の位置 x での半径が $f(x)$ だからその地点での断面積は $\pi\{f(x)\}^2$ となる．よってこの値に微小な厚み Δx を掛けて和をとれば V が求まる：

$$V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

1.2　回転体の側面積

次に、$y = f(x)$ を x 軸を中心に回転させてできる図形の、a から b までの側面積 S を求めてみよう.



上の図において、この物体の x 座標成分の位置 x での半径が y、$x + \Delta x$ での半径が $y + \Delta y$、またその間の曲線 $y = f(x)$ の長さが、ほぼ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ だから、その間の部分の側面積 ΔS は、底面の半径を $y + \Delta y$、母線を $l + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ とする円錐の側面積から、底面の半径を y、母線を l とする円錐の側面積を引いたものとほぼ一致する。ここで小さい円錐の母線の長さ l は三角形の比の関係から、

$$l : y = l + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} : y + \Delta y$$

の関係を満たしているから、

$$l = \frac{y\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta y}$$

が導かれる。よって、

$$\begin{aligned}
\Delta S &\simeq \pi\left(l+\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)(y+\Delta y)-\pi l y \\
&= \pi\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}(y+\Delta y)+\pi l\Delta y \\
&= \pi\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}(y+\Delta y)+\pi\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}y \\
&= 2\pi y\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+\pi\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\Delta y \\
&= 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x+\pi\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x\Delta y \\
&\to 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx
\end{aligned}$$

以上より、求める回転体の側面積 S は、

$$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\pi\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}f(x)dx$$

1.3 例：球の体積と表面積

それでは、例として、この二つの公式を用いて球の体積と表面積を求めてみよう。

まずは体積から、

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_r^r(\sqrt{r^2-x^2})^2dx \\
&= \pi\int_r^r r^2-x^2dx \\
&= 2\pi\int_0^r r^2-x^2dx \\
&= 2\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

次に表面積であるが、まず、$x^2+y^2=r^2$ であるから、両辺を x で微分して、

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

よって、これを公式に代入して、

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_r^r y\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx \\ &= 2\pi \int_r^r \sqrt{x^2+y^2}dx \\ &= 2\pi \int_r^r rdx \\ &= 4\pi r \int_0^r dx \\ &= 4\pi r[x]_0^r \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

1.3.1 別解

表面積は次のようにして求めても良い。

いま、半径 r の球の表面積を $S(r)$ とすると、$S(r)$ に微小の厚み dr を掛けたものを r が 0 から R まで集めたものが、球の体積 $V(R)$ である。よって式で書くと、

$$V(R) = \int_0^R S(r)dr$$

$$\therefore \frac{d}{dR}V(R) = S(R)$$

今、$V(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ だから、$S(R) = 4\pi R^2$ となる。

ちなみに、円の場合も同様に、$\dfrac{d}{dR}(\pi R^2) = 2\pi R$ が成り立つ。当然ではあるが、この議論は任意の n 次元球で成り立つだろう。