累次積分

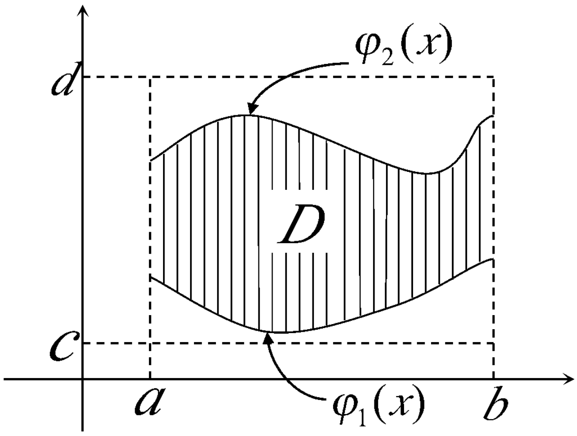
定理 0.1 (累次積分)**.**

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を $[a,b]$ で定義された連続関数で $[a,b]$ で $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ とする。又 $\Omega = \{(x,y) | a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ とする。このとき、$f(x,y)$ を Ω 上の連続関数とすると、

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

が成り立つ。

証明. 下の図において、



$F(x,y)$ を、

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)dxdy \\
&= \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^d F(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy + \int_c^{\varphi_1(x)} F(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy \right) dx
\end{aligned}$$

□