ポテンシャル関数の存在定理

定理 1.1 (ポテンシャル関数の存在定理)**.** ベクトル場 $\boldsymbol{E}$ に対してポテンシャル関数と呼ばれるスカラー関数が存在し，

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}U, \tag{1.1}$$

が成り立つための必要充分条件は，ベクトル場 $\boldsymbol{E}$ が，空間中のどの点でも，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \tag{1.2}$$

を満たすことである．

証明. まず最初に，必要性については，ベクトル解析の公式

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}U) = \boldsymbol{0}, \tag{1.3}$$

より，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \mathrm{rot}(-\mathrm{grad}U) = -\mathrm{rot}(\mathrm{grad}U) = \boldsymbol{0} \tag{1.4}$$

が成り立つから，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{E} \neq -\mathrm{grad}U \tag{1.5}$$

より明らか．そこで充分性について証明しよう．

いま，空間中の任意の点で，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \tag{1.6}$$

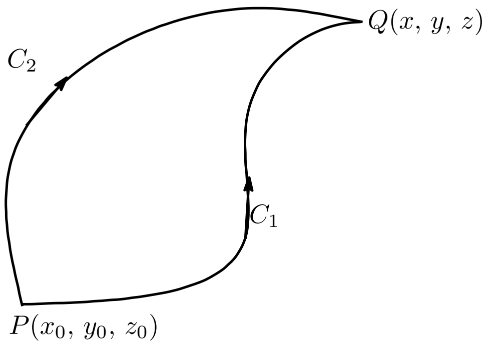
が成り立つとすると，空間中の任意の領域 D に対して，ストークスの定理より，

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_D \mathrm{rot}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0 \tag{1.7}$$

が成り立つ．従って，特に境界 ∂D が閉曲線 L になるときにも，

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0, \tag{1.8}$$

が成り立つ．



いま，閉曲線 L が 2 点 P, Q を結ぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 をつないで出来る閉曲線とし，C_1, C_2 それぞれが点 P から点 Q に向かう曲線とする．いま仮に閉曲線 L と曲線 C_1 の向きが等しいとすると，C_2 は L と逆向きの曲線だから，

$$0 = \oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{C_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} - \int_{C_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.9}$$

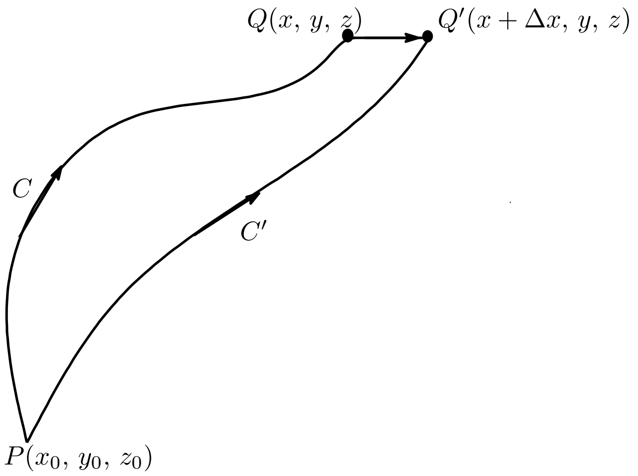
が成り立つから，

$$\int_{C_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{C_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1.10}$$

より，点 P から点 Q までの線積分は経路に依らず始点 P と終点 Q の位置だけで決まる．従って，P 点の座標を $(x_0,\, y_0,\, z_0)$，Q 点の座標を $(x,\, y,\, z)$ とすると，あるスカラー関数 U があって，

$$\int_{C_1} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -U(x_0,\, y_0,\, z_0,\, x,\, y,\, z), \tag{1.11}$$

と表せることになる．従って，U は点 P を固定した場合，$P(x_0, y_0, z_0)$ を基準として，測った値となるので，以後，点 P は動かさないものとして考え $U(x,\, y,\, z) = U(x_0,\, y_0,\, z_0,\, x,\, y,\, z)$ と表すことにする．



上の図のように，x 方向に短い距離 Δx だけ離れた 2 つの点 Q, Q' があるとき，P 点からそれらの点に至る線積分の差は，

$$\int_{C'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{C} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -U(x+\Delta x,\, y,\, z) + U(x,\, y,\, z) \tag{1.12}$$

と表されるが，いま，線積分の値が経路のとり方に依らないということより，C' に沿う積分は C に沿う積分と QQ' に沿う積分の和に等しいから，

$$\int_{QQ'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -U(x+\Delta x,\, y,\, z) + U(x,\, y,\, z), \tag{1.13}$$

と表せる．ここで線分 QQ' 上では線要素ベクトル $d\boldsymbol{l}$ な常に x 方向を向いているので，上の式の左辺の内積は，$E_x dx$ に等しい．さらに，微小な線分 QQ' の間では A_x の値は殆ど一定であると考えられるから，E_x は積分の外に出せる．すると上の式は，

$$-U(x+\Delta x,\, y,\, z) + U(x,\, y,\, z) = E_x \int_{QQ'} dx = E_x \Delta x, \tag{1.14}$$

となるので，両辺を Δx で割ってやって極限をとると，

$$E_x = -\frac{U(x+\Delta x,\, y,\, z) - U(x,\, y,\, z)}{\Delta x} \to -\frac{\partial U(x,\, y,\, z)}{\partial x}, \tag{1.15}$$

が成り立つ．この議論を QQ' が y 方向，z 方向を向いている場合にも適用すると，全く同じようにして，

$$E_y = -\frac{\partial U(x,\, y,\, z)}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial U(x,\, y,\, z)}{\partial z} \tag{1.16}$$

が導かれる．以上より，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \tag{1.17}$$

を仮定すると，

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}U, \tag{1.18}$$

と表せることが分かった． □