

多項定理

定理 0.1. 多項定理

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_n=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_n!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} \quad (i)$$

証明. (i) の左辺を構成する各成分はそれぞれ k_i を ($1 \leq k_i \leq n$) とするとき k_1 番目の成分を選び, k_2 番目の成分を選び, と続けて k_n 番目の成分を選び, それぞれを掛けたものである. よって今仮に a_1 を r_1 個, a_2 を r_2 個, \cdots a_n を r_n 個 選ぶ成分を考えると, 重複する個数は n 個のうち r_1 個の同じもの, r_2 個の同じもの, \cdots r_n 個の同じものがあるとき, これを一行に並べる並べ方の総数に等しい. よって n 種類のを全て一行に並べる総数が $n!$ 通りであるから, そのうちのそれぞれ r_1, r_2, \cdots, r_n 個のものが等しい場合にはそれぞれの重複する並べ方がそれぞれ $r_1!, r_2!, \cdots, r_n!$ 個あるのでそれで割ってやる必要がある. 以上より $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}$ の係数は, $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_n!}$ となることが示された. \square