定理 0.0.1. ポアソン方程式

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

は特解として,

$$u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{2}$$

を持つ.

この証明には次の補題を用いる:

補題 0.0.2.

$$\Delta\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

この補題の証明は少々長いので他の記事にて紹介する.

定理の証明.

$$\Delta G(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

が成り立つとすると, 合成関数の微分法を各変数に適用することにより,

$$\Delta G(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

が成り立つ. Δ が $\boldsymbol{r}'$ に作用しないことより,

$$\begin{aligned}\Delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}' &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}')\Delta G(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}' \\ &= f(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{6}$$

が成り立つから,

$$u(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}' \tag{7}$$

は, ポアソン方程式 (1) の特解になることが分かる. 従って補題より,

$$G(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|} \tag{8}$$

と置けば, それは条件を満たす解となっている. 従って, (8) 式を (7) 式に代入して,

$$u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{9}$$

は (1) の特解となる. □