Legendre の微分方程式の解について

次の 2 階線形常微分方程式を Legendre の微分方程式と呼ぶ:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\ell(\ell+1)y=0 \tag{1}$$

この微分方程式を解くために，級数解を仮定しよう．即ち，

$$y=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j \tag{2}$$

とする．すると，

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}&=(1-x^2)\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-2}\\
&=\sum_{j=2}^{\infty}-j(j-1)a_jx^j+\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-2}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}-j(j-1)a_jx^j+\sum_{j'=0}^{\infty}(j'+2)(j'+1)a_{j'+2}x^{j'}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)a_{j+2}-j(j-1)a_j\right]x^j,\\
-2x\frac{dy}{dx}&=\sum_{j=1}^{\infty}-2ja_jx^j=\sum_{j=0}^{\infty}-2ja_jx^j,\\
\ell(\ell+1)y&=\sum_{j=0}^{\infty}\ell(\ell+1)a_jx^j,
\end{aligned}$$

だから，(1) 式より，

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\ell(\ell+1)y&=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{(j+2)(j+1)a_{j+2}+\left[-j(j-1)-2j+\ell(\ell+1)\right]a_j\right\}x^j\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{(j+2)(j+1)a_{j+2}+\left[\ell(\ell+1)-j(j+1)\right]a_j\right\}x^j\\
&=0
\end{aligned}$$

が得られるが，これが任意の x について成り立つためには各係数は全て 0 であることが必要にして充分である．従って，

$$(j+2)(j+1)a_{j+2}=-\left[\ell(\ell+1)-j(j+1)\right]a_j,\qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ ) \tag{3}$$

が成り立つ．n が偶数 $n=2m$ のときは，

$$a_{2m}=a_0\prod_{k=0}^{m-1}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=a_0\prod_{k=0}^{m-1}-\frac{\ell(\ell+1)-2k(2k+1)}{(2k+2)(2k+1)}=a_0\frac{(-1)^m}{(2m)!}\prod_{k=0}^{m-1}(\ell-2k)\prod_{k=0}^{m-1}(\ell+2k+1) \tag{4}$$

n が奇数 $n=2m+1$ のときには，

$$a_{2m+1}=a_1\prod_{k=0}^{m-1}\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}=a_1\prod_{k=0}^{m-1}-\frac{\ell(\ell+1)-(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)(2k+2)}=a_1\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left[\ell-(2k+1)\right]\prod_{k=0}^{m-1}\left[\ell+2(k+1)\right] \tag{5}$$

を得るが，この項を持つ級数は ℓ が負かまたは偶数でも奇数でもないとき，$\ell-j\neq 0$ がどんな j でも成り立つ．するとこのとき (3) より，充分大きな j で，

$$a_{j+2}=-\frac{\ell(\ell+1)-j(j+1)}{(j+2)(j+1)}a_j\simeq\frac{j(j+1)}{(j+2)(j+1)}a_j\simeq a_j$$

が成り立つから例えば，$a_0 > 0$ とすると，

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right| \geq \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m}\right| - \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} x^{2m+1}\right| = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{2m}| x^{2m} - \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} x^{2m+1}\right| \sim \sum_{m=0}^{\infty} |a_0| x^{2m}$$

となるが，この級数は $x = \pm 1$ であきらかに発散してしまう．$a_0 < 0$ のときにもこの同じ変形が成り立つ．$a_1 \neq 0$ の場合も同様である． これは閉区間 $[-1,\ 1]$ で定義される解は ℓ が非負整数の場合にしか存在しないことを示している．一方，この近似により逆にこの級数解は $(-1,\ 1)$ の範囲で収束する無限級数の解なら存在しうることを示しているので級数が有限項で打ち切られなくても解になる場合があることを示している．例えば $\ell = 0$ のときには，$a_0 \neq 0$ としても，$m > 0$ に対して $a_{2m} = 0$ である．一方，(5) 式より，

$$a_{2m+1} = a_1 \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} [-(2k+1)] \prod_{k=0}^{m-1} [2(k+1)] = a_1 \frac{(-1)^{2m}(2m)!}{(2m+1)!} = \frac{a_1}{2m+1} \tag{6}$$

だから，

$$y = a_0 + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \tag{7}$$

を得るが，これは $(-1,\ 1)$ で収束するので解になる．実際，(7) 式を x で微分すると，

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \frac{a_1}{1-x^2} \tag{8}$$

となるので，

$$y = \int \frac{a_1}{1-x^2} dx + C = \int \frac{a_1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx + C = \frac{a_1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \tag{9}$$

だから，$y(0) = a_0$ より，

$$y = a_0 + \frac{a_1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \tag{10}$$

という具合に級数で無い形でも表せる．このように一般的に $\ell \geq 0$ の場合にも無限級数となる解も存在しうるが，もし解の成り立つ範囲を閉区間 $[-1,\ 1]$ とすると解となるのは多項式だけになる． 実際，ℓ が偶数つまり $\ell = 2g$ の場合，もし $a_1 \neq 0$ だとすると (5) よりこの級数は発散してしまう． 従ってこのとき $a_1 = 0$ である． そこで $\ell = 2g$ を (4) 式に代入すると，

$$a_{2m} = a_0 \frac{(-1)^m}{(2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} (2g-2k) \prod_{k=0}^{m-1} (2g+2k+1) = a_0 \frac{(-1)^m 2^m}{(2m)!} \frac{g!}{(g-m)!} \frac{[2(g+m)-1]!!}{(2g-1)!!} \tag{11}$$

となる．但し，$m-1 \geq g$ で，$a_m = 0$ である．ここで次のような変形を考える:

$$\begin{aligned} &(2p)! = (2p)!!(2p-1)!! = 2^p p!(2p-1)!! \\ \therefore\quad &(2p-1)!! = \frac{(2p)!}{2^p p!} \end{aligned}$$

この公式により，(6) 式はさらに，

$$\begin{aligned} a_{2m} &= a_0 \frac{(-1)^m 2^m}{(2m)!} \frac{g!}{(g-m)!} \frac{[2(g+m)-1]!!}{(2g-1)!!} \\ &= a_0 \frac{(-1)^m 2^m}{(2m)!} \frac{g!}{(g-m)!} \frac{(2g+2m)!}{2^{g+m}(g+m)!} \frac{2^g g!}{(2g)!} \\ &= \frac{(-1)^m (2g+2m)!}{(2m)!(g-m)!(g+m)!} \frac{(g!)^2}{(2g)!} a_0 \end{aligned}$$

と表されるが，この式は $m = 0$ でも成り立っている．従って，

$$y = \sum_{m=0}^{g} \frac{(-1)^m (2g+2m)!}{(2m)!(g-m)!(g+m)!} \frac{(g!)^2}{(2g)!} a_0 x^{2m} = \frac{(g!)^2}{(2g)!} a_0 \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^m (2g+2m)!}{(2m)!(g-m)!(g+m)!} x^{2m} \tag{12}$$

となるので，$m \equiv n/2 - r$, $2g \equiv n$ と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{(g!)^2}{(2g)!} a_0 \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^m (2g+2m)!}{(2m)!(g-m)!(g+m)!} x^{2m} \\
&= \frac{(\frac{n}{2}!)^2}{n!} a_0 \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{(n-2r)!r!(n-r)!} x^{n-2r} \\
&= \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^n}{n!} a_0 \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)} x^{n-2r}
\end{aligned}
$$

が得られる．同様に $\ell = 2g+1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
a_{2m+1} &= a_1 \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} [\ell - (2k+1)] \prod_{k=0}^{m-1} [\ell + 2(k+1)] \\
&= a_1 \frac{(-1)^m 2^m}{(2m+1)!} \frac{g!}{(g-m)!} \frac{[2(g+m)+1]!!}{(2g+1)!!} \\
&= a_1 \frac{(-1)^m 2^m}{(2m+1)!} \frac{g!}{(g-m)!} \frac{[2(g+m)+1]!}{2^{g+m}(g+m)!} \frac{2^g g!}{(2g+1)!} \\
&= \frac{(-1)^m (2g+1+2m)!}{(2m+1)!(g-m)!(g+m)!} \frac{(g!)^2}{(2g+1)!} a_1
\end{aligned}
$$

だから，このときの解は，$m \equiv \dfrac{n-1}{2} - r$, $n \equiv 2g+1$ と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{(g!)^2}{(2g+1)!} a_1 \sum_{m=0}^{g} \frac{(-1)^m (2g+1+2m)!}{(2m+1)!(g-m)!(g+m)!} x^{2m+1} \\
&= \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!} a_1 \sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-r} (2n-2r-1)!}{(n-2r)!r!(n-1-r)!} x^{n-2r} \\
&= \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^n}{n!} a_1 \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r-1)!}{2^n (n-2r)!r!(n-1-r)!} x^{n-2r} \\
&= \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^n}{n!} a_1 \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n-r}{2n-2r} \cdot \frac{2n-2r}{n-r} \cdot \frac{(-1)^r (2n-2r-1)!}{2^n (n-2r)!r!(n-r-1)!} x^{n-2r} \\
&= \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2 2^{n-1}}{n!} a_1 \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n (n-2r)!r!(n-r)!} x^{n-2r}
\end{aligned}
$$

が得られる．以上より，$\ell = n$ とするとき，n の偶奇によらず，(1) に示した Legendre の微分方程式の級数解は，

$$
y = C \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \tag{13}
$$

と表されることが分かった．ここで，

$$
P_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \tag{14}
$$

を Legendre 多項式と呼ぶ.

Legendre 多項式の母関数

Legendre 多項式 $P_n(x)$ は，$[-1,\ 1]$ で定義される多項式であるが，実は次のように母関数から生成できる.

$$
G(t,\ x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{15}
$$

ここで，収束条件より $-1 < t < 1$ で定義される．これより，$\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ を t と x について冪級数展開をし係数を比較することにより $P_n(x)$ が得られることになる．そこで，

$$y \equiv 2tx - t^2 \tag{16}$$

と置くと，二項定理より，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = (1-y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{s-1}(-\frac{1}{2}-k)}{s!}(-y)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s-1)!!}{2^s s!} y^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} y^s \tag{17}$$

と表される．ここで再度二項定理より，

$$y^s = t^s(2x-t)^s = t^s \sum_{r=0}^{s} {}_sC_r(-t)^r(2x)^{s-r} = \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^r 2^{s-r} s!}{r!(s-r)!} t^{s+r} x^{s-r} \tag{18}$$

だから，結局，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^r 2^{s-r} s!}{r!(s-r)!} t^{s+r} x^{s-r} = \sum_{\substack{0 \le s < \infty \\ 0 \le r \le s}} \frac{(-1)^r (2s)!}{2^{s+r} s! r! (s-r)!} t^{s+r} x^{s-r} \tag{19}$$

ここで $P_n(x)$ の形をはっきりさせるために t の肩の指数を n とすると，$s = n - r$ となるから，

$$\sum_{\substack{0 \le s < \infty \\ 0 \le r \le s}} \frac{(-1)^r (2s)!}{2^{s+r} s! r! (s-r)!} t^{s+r} x^{s-r} = \sum_{\substack{0 \le n-r < \infty \\ 0 \le r \le n-r}} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n (n-r)! r! (n-2r)!} t^n x^{n-2r} \tag{20}$$

となるが，この変数変換によって，和をとる範囲は $0 \le n < \infty,\ 0 \le r \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$ となるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0 \le n-r < \infty \\ 0 \le r \le n-r}} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n (n-r)! r! (n-2r)!} t^n x^{n-2r} &= \sum_{\substack{0 \le n < \infty \\ 0 \le r \le \left[\frac{n}{2}\right]}} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n (n-r)! r! (n-2r)!} x^{n-2r} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n
\end{aligned}$$

となる．従って，$P_n(x)$ は，

$$P_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n r! (n-r)! (n-2r)!} x^{n-2r} \tag{21}$$

となるが，これは (14) 式と一致している．

Legendre 多項式の直交性と規格化定数

続いて，Legendre 多項式の重要な性質である直交性と Legendre 多項式を正規化するための規格化定数を両方同時に求めよう．それは，次の式に集約される:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \tag{22}$$

この証明には母関数を用いる．まず，

$$\int_{-1}^{1} G(s,\ x) \cdot G(t,\ x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) s^m \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n dx = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s^m t^n \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx \tag{23}$$

一方，(15) 式より，

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} G(s,\ x)\cdot G(t,\ x)dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2s\left(\frac{1+s^2}{2s}-x\right)}}\frac{1}{\sqrt{2t\left(\frac{1+t^2}{2t}-x\right)}}dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{st}}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s}-x}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2}{2t}-x}}dx \qquad (24)
\end{aligned}$$

だから，$\alpha \equiv \dfrac{1+s^2}{2s}$，$\beta \equiv \dfrac{1+t^2}{2t}$ と置いて，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}\sqrt{\beta-x}} = \int \frac{1}{\alpha-x}\sqrt{\frac{\alpha-x}{\beta-x}}dx \qquad (25)$$

を求めればよい．一般に，$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ を含む積分は $w \equiv \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置くと解ける場合が多いので，今回の場合，$w \equiv \sqrt{\dfrac{\alpha-x}{\beta-x}}$ と置くことにすると，

$$w^2 = \frac{\alpha-x}{\beta-x} = \frac{\beta-x+\alpha-\beta}{\beta-x} = 1+\frac{\alpha-\beta}{\beta-x} \qquad (26)$$

となるから，両辺を微分して，

$$2wdw = \frac{\alpha-\beta}{(\beta-x)^2}dx$$

つまり，

$$dx = 2w\frac{(\beta-x)^2}{\alpha-\beta}dw \qquad (27)$$

となるので，これを (24) 式に代入して，

$$\int \frac{1}{\alpha-x}w\times 2w\frac{(\beta-x)^2}{\alpha-\beta}dw = \frac{2}{\alpha-\beta}\int w^2\frac{(\beta-x)^2}{\alpha-x}dw = \frac{2}{\alpha-\beta}\int w^2\times w^{-2}(\beta-x)dw = \frac{2}{\alpha-\beta}\int \beta-xdw \qquad (28)$$

となるが，(25) 式より，$\beta-x = \dfrac{\alpha-\beta}{w^2-1}$ だから，

$$\frac{2}{\alpha-\beta}\int \beta-xdw = \frac{2}{\alpha-\beta}\int \frac{\alpha-\beta}{w^2-1}dw = 2\int \frac{1}{w^2-1}dw = \int \frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}dw = \ln|w-1|-\ln|w+1|+C \qquad (29)$$

従って，

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}\sqrt{\beta-x}} &= \ln\left|\sqrt{\frac{\alpha-x}{\beta-x}}-1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{\alpha-x}{\beta-x}}+1\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{\alpha-x}-\sqrt{\beta-x}}{\sqrt{\beta-x}}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}}{\sqrt{\beta}-x}\right| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{\alpha-x}-\sqrt{\beta-x}\right| \cancel{-\ln\left|\sqrt{\beta-x}\right|} - \ln\left|\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right| \cancel{+\ln\left|\sqrt{\beta-x}\right|} + C \\
&= \ln\left|\sqrt{\alpha-x}-\sqrt{\beta-x}\right| + \ln\left|\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right| - 2\ln\left|\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right| + C \\
&= \ln|\alpha-x-(\beta-x)| - 2\ln\left|\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right| + C \\
&= -2\ln\left|\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right| + \ln|\alpha-\beta| + C \\
&= -2\ln\left(\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}\right) + C'
\end{aligned}$$

より,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}\sqrt{\beta - x}} = -2\ln\left(\sqrt{\alpha - x} + \sqrt{\beta - x}\right) + C$$

となることが分かる．これを用いると (24) 式の積分は,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{st}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}}\frac{1}{\sqrt{\beta - x}}dx &= \frac{1}{2\sqrt{st}}\left[-2\ln\left(\sqrt{\alpha - x} + \sqrt{\beta - x}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha + 1} + \sqrt{\beta + 1}}{\sqrt{\alpha - 1} + \sqrt{\beta - 1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} + 1} + \sqrt{\frac{1+t^2}{2t} + 1}}{\sqrt{\frac{1+s^2}{2s} - 1} + \sqrt{\frac{1+t^2}{2t} - 1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{\frac{1+s}{\sqrt{2s}} + \frac{1+t}{\sqrt{2t}}}{\frac{1-s}{\sqrt{2s}} + \frac{1-t}{\sqrt{2t}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{(1+s)\sqrt{t} + (1+t)\sqrt{s}}{(1-s)\sqrt{t} + (1-t)\sqrt{s}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{t} + (s\sqrt{t} + t\sqrt{s})}{\sqrt{s} + \sqrt{t} - (s\sqrt{t} + t\sqrt{s})}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{st}(\sqrt{s} + \sqrt{t})}{\sqrt{s} + \sqrt{t} - \sqrt{st}(\sqrt{s} + \sqrt{t})}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{(\sqrt{s} + \sqrt{t})(1 + \sqrt{st})}{(\sqrt{s} + \sqrt{t})(1 - \sqrt{st})}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{st}}{1 - \sqrt{st}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{st}}\left(\ln(1 + \sqrt{st}) - \ln(1 - \sqrt{st})\right)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+X}dX = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \tag{30}$$

だから,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{st}}\left(\ln(1 + \sqrt{st}) - \ln(1 - \sqrt{st})\right) &= \frac{1}{\sqrt{st}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(\sqrt{st})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{st}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-\sqrt{st})^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(\sqrt{st})^n + \frac{1}{n+1}(\sqrt{st})^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}(st)^k
\end{aligned}$$

これが，(23) 式の右辺と等しいのだから,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}s^m t^n \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}(st)^k && (31) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}s^n t^n && (32) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\delta_{mn}s^m\right)t^n && (33) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\delta_{mn}s^m t^n && (34)
\end{aligned}$$

これが任意の $-1 < s,\ t < 1$ で成り立つから,

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{mn} \tag{35}$$

が示された.

Legendre 多項式の完全性

Legendre 多項式の直交性より Legendre 多項式はお互いに独立な n 次の多項式となっていることが分かる．ここで関数系 $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $[-1,\ 1]$ で完全だから，任意の独立な n 次多項式の集合も完全である．これより，Legendre 多項式の列 $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，閉区間 $[-1,\ 1]$ で完全である．

Rodrigues の公式

Legendre 多項式は Rodrigues の公式により，次のように表せる:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{36}$$

証明は次のようにすればよい．まず，$(x^2-1)^n$ を二項定理により展開すると，

$$(x^2-1)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (x^2)^{n-r}(-1)^r = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r}$$

ここで，

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2r}) = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r}$$

だから，x^{2n-2r} の項が n 回微分すると $r > \left[\dfrac{n}{2}\right]$ の項が全て消えてしまうことより，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r} \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2^n n!}\frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r} \\
&= \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

よって，(36) が示された．

Legendre 陪関数

Legendre 陪関数は次のように定義される:

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \tag{37}$$

この式より明らかに $m=0$ のとき，Rodrigues の公式になるから，$P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$ つまり $m=0$ のときの Legendre 陪関数は Legendre 多項式になる．また，$(x^2-1)^\ell$ は 2ℓ 次の多項式だから，微分が意味を持つのは $0 \le \ell+m \le 2\ell$ 即ち，

$$-\ell \le m \le \ell \tag{38}$$

の範囲になる．

Legendre 陪関数の対称性

Legendre 陪関数は次のような対称性がある:

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x) \tag{39}$$

この証明は次のようにする．まず，

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell, \tag{40}$$

$$P_\ell^{-m}(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell, \tag{41}$$

だから，

$$\frac{1}{(1-x^2)^m}\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell \tag{42}$$

が示せればよい．高階微分に関する Leibniz の公式を用いると，

$$\begin{aligned}
&\ell+m-r > \ell \text{で} \frac{d^{\ell+m-r}}{dx^{\ell+m-r}}(x+1)^\ell = 0, \\
&r > \ell \text{で} \frac{d^r}{dx^r}(x-1)^r = 0,
\end{aligned}$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell &= \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x+1)^\ell(x-1)^\ell \\
&= \sum_{r=0}^{\ell+m} {}_{\ell+m}C_r \frac{d^{\ell+m-r}}{dx^{\ell+m-r}}(x+1)^\ell \frac{d^r}{dx^r}(x-1)^\ell \\
&= \sum_{r=m}^{\ell} \frac{(\ell+m)!}{r!(\ell+m-r)!}\frac{\ell!}{[\ell-(\ell+m-r)]}(x+1)^{[\ell-(\ell+m-r)]}\frac{\ell!}{(\ell-r)!}(x-1)^{\ell-r} \\
&= (\ell+m)!\sum_{r=m}^{\ell}\frac{\ell!}{(r-m)!(\ell+m-r)!}\frac{\ell!}{r!(\ell-r)!}(x+1)^{r-m}(x-1)^{\ell-r} \\
&= (\ell+m)!\sum_{r=m}^{\ell} {}_\ell C_{r-m} {}_\ell C_r (x+1)^{r-m}(x-1)^{\ell-r}
\end{aligned} \tag{43}$$

同様に $-m$ のときには，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x^2)^m}\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell &= \frac{1}{(1-x^2)^m}\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x+1)^\ell(x-1)^\ell \\
&= \frac{1}{(-1)^m(x^2-1)^m}\sum_{r=0}^{\ell-m} {}_{\ell-m}C_r \frac{d^{\ell-m-r}}{dx^{\ell-m-r}}(x+1)^\ell\frac{d^r}{dx^r}(x-1)^\ell \\
&= \frac{(-1)^m}{(x^2-1)^m}\sum_{r=0}^{\ell-m}\frac{(\ell-m)!}{r!(\ell-m-r)!}\frac{\ell!}{[\ell-(\ell-m-r)]!}\frac{\ell!}{(\ell-r)!}(x+1)^{\ell-(\ell-m-r)}(x-1)^{\ell-r} \\
&= \frac{(-1)^m(\ell-m)!}{(1-x^2)^m}\sum_{r=0}^{\ell-m}\frac{\ell!}{(m+r)![\ell-(m+r)]!}\frac{\ell!}{r!(\ell-r)!}(x+1)^{m+r}(x-1)^{\ell-r} \\
&= (-1)^m(\ell-m)!\sum_{r=0}^{\ell-m} {}_\ell C_{m+r} {}_\ell C_r (x+1)^{m+r}(x-1)^{\ell-(r+m)}
\end{aligned}$$

となる．ここで $s \equiv m+r$ と置くと，

$$\begin{aligned}
(-1)^m(\ell-m)!\sum_{r=0}^{\ell-m} {}_\ell C_{m+r} {}_\ell C_r (x+1)^{m+r}(x-1)^{\ell-(r+m)} &= (-1)^m(\ell-m)!\sum_{s=m}^{\ell} {}_\ell C_s {}_\ell C_{s-m}(x+1)^s(x-1)^{\ell-s} \\
&= \frac{(-1)^m(\ell-m)!}{(\ell+m)!}(\ell+m)!\sum_{r=m}^{\ell} {}_\ell C_r {}_\ell C_{r-m}(x+1)^r(x-1)^{\ell-r}
\end{aligned}$$

従って (44) と比較すると，(43) 式，

$$\frac{1}{(1-x^2)^m}\frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$$

が得られることが示された．

昇降演算子

Legendre 陪関数に対して次のような漸化式が成り立つ:

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+mx\right]P_\ell^m(x)=\sqrt{1-x^2}P_\ell^{m+1}(x), \tag{44}$$

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx\right]P_\ell^m(x)=-(\ell+m)(\ell-m+1)\sqrt{1-x^2}P_\ell^{m-1}(x), \tag{45}$$

ここで,

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}+mx \tag{46}$$

は，$P_\ell^m(x)$ の次数を一つ上げるので上昇演算子と呼ぶ．一方,

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx \tag{47}$$

は逆に $P_\ell^m(x)$ の次数を一つ下げるので下降演算子と呼ぶ．そして両方合わせて昇降演算子と呼ぶ.

(45) の証明は次のようになる:

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell^m &= (1-x^2)\times\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}(-2x)\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell+(1-x^2)\times\frac{1}{2^\ell\ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell+m+1}}{dx^{\ell+m+1}}(x^2-1)^\ell\\ &= -mx\frac{1}{2^\ell\ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2^\ell\ell!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\frac{d^{\ell+m+1}}{dx^{\ell+m+1}}(x^2-1)^\ell\\ &= -mxP_\ell^m(x)+\sqrt{1-x^2}P_\ell^{m+1}\end{aligned}$$

よって (45) が示された．(46) は，式 (45) の m を $-m$ に置き換えて,

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx\right]P_\ell^{-m}(x)=\sqrt{1-x^2}P_\ell^{-m+1}(x) \tag{48}$$

このに現れる P_ℓ^{-m} と $P_\ell^{-(m-1)}$ を対称性の式 (40) によって置き換えると,

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx\right](-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x)=\sqrt{1-x^2}^{\frac{1}{2}}(-1)^{m-1}\frac{[\ell-(m-1)]!}{(\ell+m-1)!}P_\ell^{m-1}(x) \tag{49}$$

となるので，階乗部分をまとめると，(46) 式が得られる.

Legendre 陪関数を解に持つ微分方程式

Legendre 陪関数は次の微分方程式の解として得られる:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m(x)-2x\frac{d}{dx}P_\ell^m(x)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m(x)=0 \tag{50}$$

この証明にはそのまま $P_\ell^m(x)$ を代入して確かめても良いが，昇降演算子を用いても出来る．いま (51) 式は，$P_\ell^m(x)$ に対する 2 階の微分方程式である．一方，上昇演算子も下降演算子も 1 階までの微分で出来ているから，$P_\ell^m(x)$ に下降演算子を作用させてから，さらに上昇演算子を作用させると，$P_\ell^m(x)$ の式に戻ることが予想される．ここで下降演算子に上昇演算子を作用させたものは，2 階の演算子になるから，2 階の微分方程式が得られることになる．従って，ここでもし (51) 式が成り立つのであれば，この操作で恐らく (51) 式と同値な式が得られるはずである．そこでこの方針で実際に (51) 式が得られるか確かめてみよう.

まず，(46) 式より,

$$P_\ell^{m-1}(x)=-\frac{1}{(\ell+m)(\ell-m+1)\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx\right]P_\ell^m(x) \tag{51}$$

が得られる．次に，この $P_\ell^{m-1}(x)$ に上昇演算子を作用させるために，(45) 式において $m\to m-1$ と置き換えると,

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]P_\ell^{m-1}(x)=\sqrt{1-x^2}P_\ell^m(x) \tag{52}$$

となるから，この式に (52) 式の $P_\ell^{m-1}(x)$ を代入すると，

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]-\frac{1}{(\ell+m)(\ell-m+1)\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}-mx\right]P_\ell^m(x)=\sqrt{1-x^2}P_\ell^m(x) \tag{53}$$

つまり，

$$-\frac{1}{(\ell+m)(\ell-m+1)}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right]P_\ell^m(x)=\sqrt{1-x^2}P_\ell^m(x) \tag{54}$$

となる．ここで，演算子としてみると，

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\right)=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2}{dx^2}-x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}, \tag{55}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}\left(-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-m(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+mx^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-mx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx} \tag{56}$$

だから，

$$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right] \tag{57}$$

$$=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2}{dx^2}-2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}-m(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-m^2x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{58}$$

をえる. そこでこの式を $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ で割ってやると，

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right] \tag{59}$$

$$=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}-m-m^2x^2(1-x^2)^{-1} \tag{60}$$

一方，

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}+(m-1)x\right]\left[\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}-\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right]P_\ell^m&=-(\ell+m)(\ell-m+1)P_\ell^m\\&=-[\ell(\ell+1)+m(1-m)]P_\ell^m\end{aligned}$$

だから，結局，

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m-2x\frac{d}{dx}P_\ell^m+\left[\ell(\ell+1)+m(1-m)-m-m^2x^2(1-x^2)^{-1}\right]P_\ell^m=0 \tag{61}$$

より，

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell^m-2x\frac{d}{dx}P_\ell^m+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m=0 \tag{62}$$

が示された.

Legendre 陪関数の直交性

Legendre 陪関数は m を固定したとき，次のような直交性を持つ:

$$\int_{-1}^{1}P_\ell^m(x)P_{\ell'}^m(x)=\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'} \tag{63}$$

この等式は明らかに $m=0$ のとき，Legendre 多項式の直交性の式と一致する．注意すべきは Legendre 陪関数の直交性は，$n\neq m$ の時の，P_ℓ^n と $P_{\ell'}^m$ に対して成り立つものではないということである．これは例えば前節で証明したように，ルジャンドル多項式の列 $\{P_\ell^0\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ は完全性があるのであるから，それより大きな集合である $\{P_\ell^m\}$ の要素が全て互いに直交することはないということでもある.

この証明は次のようにする:

まず，P_ℓ^{-m} と $P_{\ell'}^m$ に対して，$\ell=0$ または $\ell'=0$ とすると，Legendre 陪関数の定義式より，$m=0$ となるので，このとき，Legendre 多項式の直交性より，

$$\int_{-1}^{1}P_0(x)P_0(x)dx=\int_{-1}^{1}P_\ell(x)P_{\ell'}dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}=\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}=2 \tag{64}$$

より，求める公式は成立している．よって以後，ℓ, $\ell' > 0$ としよう．このとき，

$$I_m \equiv \int_{-1}^{1} P_\ell^{-m}(x) P_{\ell'}^{m}(x) dx \tag{65}$$

と置くと，Legendre 陪関数の定義に部分積分を適用することにより，任意の $m \geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_{-1}^{1} P_\ell^{-m}(x) P_{\ell'}^{m}(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell \frac{1}{2^{\ell'}\ell'!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell'+m}}{dx^{\ell'+m}}(x^2-1)^{\ell'} dx \\
&= \left[\frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell \frac{1}{2^{\ell'}\ell'!} \frac{d^{\ell'+m-1}}{dx^{\ell'+m-1}}(x^2-1)^{\ell'} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell-m+1}}{dx^{\ell-m+1}}(x^2-1)^\ell \frac{1}{2^{\ell'}\ell'!} \frac{d^{\ell+m-1}}{dx^{\ell+m-1}}(x^2-1)^{\ell'} dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{-\frac{m-1}{2}} \frac{d^{\ell-(m-1)}}{dx^{\ell-(m-1)}}(x^2-1)^\ell \frac{1}{2^{\ell'}\ell'!}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^{\ell+m-1}}{dx^{\ell+m-1}}(x^2-1)^{\ell'} dx \\
&= -\int_{-1}^{1} P_\ell^{-(m-1)}(x) P_{\ell'}^{m+1}(x) dx \\
&= -I_{m-1}
\end{aligned}$$

ここで，$\ell' + m \leq 2\ell'$ より，$1 \leq m \leq \ell'$ であり，$\ell' + m - 1 \leq 2\ell' - 1$ だから，端点，$x = \pm 1$ で，

$$\frac{1}{2^{\ell'}\ell'!} \frac{d^{\ell'+m-1}}{dx^{\ell'+m-1}}(x^2-1)^{\ell'}$$

が 0 になることを用いた．

したがって，

$$I_m = (-1)^m I_0 = (-1)^m \int_{-1}^{1} P_\ell^0(x) P_{\ell'}^0(x) dx = (-1)^m \int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = (-1)^m \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} \tag{66}$$

が成り立つ，一方，対称性の式より，

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) \tag{67}$$

であるから，

$$I_m = \int_{-1}^{1} P_\ell^{-m}(x) P_{\ell'}^{m}(x) dx = \int_{-1}^{1} (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx \tag{68}$$

が成り立つ．よってこれより，

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

が得られた．