Laguerre の微分方程式の解について

次の微分方程式を Laguerre の微分方程式と呼ぶ:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0 \tag{1}$$

この微分方程式を解くために，級数解を仮定しよう．即ち，

$$y\equiv\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j$$

と置く．すると，

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)ja_{j+1}x^j,$$

$$(1-x)\frac{dy}{dx}=\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^{j-1}-\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^j=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x^j-\sum_{j=0}^{\infty}ja_jx^j=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+1)a_{j+1}-ja_j\right]x^j,$$

$$ny=\sum_{j=0}^{\infty}na_jx^j,$$

以上より，(1) 式は,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{(j+1)ja_{j+1}+\left[(j+1)a_{j+1}-ja_j\right]+na_j\right\}x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+1)^2a_{j+1}+(n-j)a_j\right]x^j=0$$

と表されるから，この式が恒等的に成り立つことより，

$$(j+1)^2a_{j+1}+(n-j)a_j=0,$$

つまり，

$$a_{j+1}=-\frac{n-j}{(j+1)^2}a_j,\qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2}$$

が成り立つ．これより一般項を a_m とすると，

$$a_m=a_0\prod_{j=0}^{m-1}\frac{a_{j+1}}{a_j}=a_0\prod_{j=0}^{m-1}-\frac{n-j}{(j+1)^2}=a_0(-1)^m\frac{\prod_{j=0}^{m-1}(n-j)}{\prod_{j=0}^{m-1}(j+1)^2}=a_0(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}$$

が得られる．これより，$m>n$ のとき $a_m=0$ だから，(1) の級数解は,

$$y=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j=\sum_{j=0}^{n}a_0(-1)^j\frac{n!}{(n-j)!(j!)^2}x^j=\frac{a_0}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{(n!)^2}{(n-j)!(j!)^2}x^j \tag{3}$$

と表されることになる．ここで最後に $n!$ の項を新たに設けているのは,

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{(n!)^2}{(n-j)!(j!)^2}x^j \tag{4}$$

と表される Laguerre の多項式によって級数解が表されることを示すためである．

Laguerre 多項式の母関数

Laguerre の多項式は次のように母関数によって得ることが出来る:

$$E_g(t,\ x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{5}$$

この式の中の，e を Maclaurin 展開すると，

$$E_g(t,\ x)=\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{1-t}\frac{\left(-\frac{xt}{1-t}\right)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}x^r\frac{t^r}{(1-t)^{r+1}}$$

が得られる．ここで二項定理より，

$$(1-t)^{-(r+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{s-1}[-(r+1)-k]}{s!}(-t)^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{s-1}[r+k+1]}{s!}t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}t^s$$

が成り立つから，

$$E_g(t,\ x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}x^r \frac{t^r}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}x^r t^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}t^s = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} x^r \frac{(-1)^r}{r!}\frac{(r+s)!}{r!s!}t^{r+s}$$

ここで変数変換，$n \equiv r+s$ を行うと，

$$E_g(t,\ x) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} x^r \frac{(-1)^r}{r!}\frac{(r+s)!}{r!s!}t^{r+s} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r (n!)^2}{(r!)^2(n-r)!}x^r\right)\frac{t^n}{n!}$$

を得る．これより，

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r (n!)^2}{(r!)^2(n-r)!}x^r$$

が得られるが，これは (4) 式に他ならない．

Laguerre 多項式の昇降演算子

Laguerre 多項式に対し，次の昇降演算が成り立つ:

$$\left(x\frac{d}{dx} + n + 1 - x\right)L_n(x) = L_{n+1}(x), \tag{6}$$

$$\left(x\frac{d}{dx} - n\right)L_n(x) = -n^2 L_{n-1}(x), \tag{7}$$

括弧の中身をそれぞれ Laguerre 多項式の上昇演算子，下降演算子と呼ぶ．

この証明は母関数を用いる．まず，(6) を証明する．母関数 (5) を偏微分すると，

$$\frac{\partial E_g}{\partial t} = \frac{1}{(1-t)^2}e^{-\frac{xt}{1-t}} + \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\left(\frac{-x(1-t)-xt}{(1-t)^2}\right) = \left[\frac{1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2}\right]E_g = \frac{1-t-x}{(1-t)^2}\cdot E_g \tag{8}$$

$$\frac{\partial E_g}{\partial x} = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\left(-\frac{t}{1-t}\right) = -\frac{t}{1-t}\cdot E_g \tag{9}$$

ここで次の計算を実行する．

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial E_g}{\partial x} + t\frac{\partial E_g}{\partial t} + (1-x)E_g &= -\frac{xt}{1-t}\cdot E_g + t\left[\frac{1-t-x}{(1-t)^2}\right]\cdot E_g + (1-x)E_g \\
&= \frac{-xt(1-t) + t(1-t-x) + (1-x)(1-t)^2}{(1-t)^2}\cdot E_g \\
&= \frac{-\cancel{xt} + \cancel{xt^2} + t - \cancel{t^2} - \cancel{xt} + 1 - 2t + \cancel{t^2} - x + \cancel{2xt} - \cancel{xt^2}}{(1-t)^2}\cdot E_g \\
&= \frac{1-t-x}{(1-t)^2}\cdot E_g \\
&= \frac{\partial E_g}{\partial t}
\end{aligned}$$

だから，

$$E_g(t,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

を代入すると，

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) + t\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right) + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$

だからこれを計算すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x\frac{dL_n(x)}{dx}+\sum_{n=0}^{\infty}nL_n(x)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)L_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}$$

よってこれより, 同じ次数の項をまとめると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\frac{dL_n(x)}{dx}+nL_n(x)+(1-x)L_n(x)-L_{n+1}(x)\right)\frac{t^n}{n!}=0$$

これより, 任意の t, x でこれが成り立つには, 各係数が全て 0 でなければならないから,

$$x\frac{dL_n(x)}{dx}+nL_n(x)+(1-x)L_n(x)-L_{n+1}(x)=0$$

即ち,

$$x\frac{dL_n(x)}{dx}+(n+1-x)L_n(x)=L_{n+1}(x)$$

が示された.

次に (7) を示そう. 方針はほぼ同じである. 次の計算から始めよう:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial E_g}{\partial x}-t\frac{\partial E_g}{\partial t}&=x\left(-\frac{t}{1-t}\cdot E_g\right)-t\left(\frac{1-t-x}{(1-t)^2}\cdot E_g\right)\\
&=\frac{-xt(1-t)-t(1-t-x)}{(1-t)^2}\cdot E_g\\
&=\frac{-\cancel{xt}+xt^2-t+t^2+\cancel{xt}}{(1-t)^2}\cdot E_g\\
&=\frac{-t(1-t)^2-t^2(1-t-x)}{(1-t)^2}\cdot E_g\\
&=-tE_g-t^2\frac{\partial E_g}{\partial t}\\
&=-t\frac{\partial}{\partial t}(tE_g)
\end{aligned}$$

だから,

$$E_g(t,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

を代入すると,

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)-t\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)=-t\frac{\partial}{\partial t}t\left(\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$

だからこれを計算して,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x\frac{dL_n(x)}{dx}-\sum_{n=0}^{\infty}nL_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}nL_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2L_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!}$$

を得る. よってこれより同じ次数の項をまとめれば,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\frac{dL_n(x)}{dx}-nL_n(x)-n^2L_{n-1}(x)\right)\frac{t^n}{n!}=0$$

だから,

$$x\frac{dL_n(x)}{dx}-nL_n(x)=n^2L_{n-1}(x)$$

が示された.

Laguerre 多項式の直交性

Laguerre 多項式は次のように直交性を持つ:

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{mn} \tag{10}$$

この証明は母関数を用いて行う.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx &= \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty L_m(x)\frac{s^m}{m!}\sum_{n=0}^\infty L_n(x)\frac{t^n}{n!}e^{-x}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1-s}e^{-\frac{xs}{1-s}}\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}dx \\
&= \frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\left[-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1}e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\left(\frac{s(1-t)+t(1-s)+(1-s)(1-t)}{(1-s)(1-t)}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{s(1-t)+t(1-s)+(1-s)(1-t)}(1-s)(1-t) \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^\infty (st)^n \\
&= \sum_{n=0}^\infty\sum_{m=0}^\infty (n!)^2\delta_{mn}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

よってこれより,

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{mn}$$

が示された.

Laguerre 多項式に対する Rodrigues の公式

Laguerre 多項式は次のように Rodrigues の公式で表せる:

$$L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}) \tag{11}$$

この証明は, 高階導関数に関する Leibniz の公式により,

$$e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}) = e^x\sum_{r=0}^n {}_nC_r\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(x^n)\frac{d^r}{dx^r}(e^{-x}) = e^x\sum_{r=0}^n {}_nC_r\frac{n!}{r!}x^r(-1)^re^{-x} = \sum_{r=0}^n(-1)^r\frac{(n!)^2}{(r!)^2(n-r)!}x^r$$

よって, (4) 式が得られたので, (11) が示された.

Laguerre 陪微分多項式

次の微分方程式を Laguerre 陪微分方程式と呼ぶ:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dy}{dx}+(n-k)y=0 \tag{12}$$

この方程式を解くために，級数解を仮定しよう．即ち，

$$y \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

と置く．すると，

$$\begin{aligned}
x\frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)ja_{j+1}x^j, \\
(k+1-x)\frac{dy}{dx} &= \sum_{j=1}^{\infty}(k+1)ja_jx^{j-1} - \sum_{j=1}^{\infty} ja_jx^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(k+1)(j+1)a_{j+1}x^j - \sum_{j=0}^{\infty} ja_jx^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left[(k+1)(j+1)a_{j+1} - ja_j\right]x^j, \\
(n-k)y &= \sum_{j=0}^{\infty}(n-k)a_jx^j,
\end{aligned}$$

だから，(12) 式は，

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)ja_{j+1}x^j + \sum_{j=0}^{\infty}\left[(k+1)(j+1)a_{j+1} - ja_j\right]x^j + \sum_{j=0}^{\infty}(n-k)a_jx^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{(j+1)ja_{j+1} + \left[(k+1)(j+1)a_{j+1} - ja_j\right] + (n-k)a_j\right\}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left\{(j+k+1)(j+1)a_{j+1} + (n-k-j)a_j\right\}x^j \\
&= 0
\end{aligned}$$

よってこれより，

$$(j+k+1)(j+1)a_{j+1} + (n-k-j)a_j = 0, \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

即ち，

$$a_{j+1} = -\frac{(n-k-j)}{(j+k+1)(j+1)}a_j, \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{13}$$

が成り立つが，$j = n-k$ のとき，$a_{j+1} = 0$ となってしまうから，，一般項 a_m は $m > n-k$ のとき，全て 0 になってしまう．一方，$m \leq n-k$ のとき，

$$a_m = a_0\prod_{j=0}^{m-1}\frac{a_{j+1}}{a_j} = a_0\prod_{j=0}^{m-1} -\frac{(n-k-j)}{(j+k+1)(j+1)} = a_0(-1)^m\frac{k!(n-k)!}{(m+k)!m!(n-k-m)!} \tag{14}$$

従って，Laguerre 陪微分方程式 (12) の級数解は，一般に，

$$y = a_0\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m\frac{k!(n-k)!}{(m+k)!m!(n-k-m)!}x^m = a_0(-1)^k\frac{k!(n-k)!}{(n!)^2}\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^{m+k}\frac{(n!)^2}{(m+k)!m!(n-k-m)!}x^m \tag{15}$$

ここでこの解は明らかに多項式になっているが，これは単に級数解というよりもむしろ解析的な関数一般まで含めたごく一般的な解になっている．というのはこの解は解の収束条件等を考慮するなどしたものではなく，”単に”級数解であると仮定しただけで，多項式の解が得られたからである．またここで最後の式変形は $\sum\cdots$ の部分が Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$ で表せるためで，結局，Laguerre 陪微分方程式の解は，定数倍を除き，この Laguerre 陪多項式で表されることになる．

Laguerre 陪多項式の定義

Laguerre 陪多項式は，次のように Laguerre 多項式を微分して得られる:

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x), \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n) \tag{16}$$

これより，明らかに $k = 0$ のとき Laguerre 陪多項式は Laguerre 多項式に一致する．

さてここで Laguerre 陪微分方程式の級数解 (15) が本当に Laguerre 陪多項式になっていることを示そう．いま，Laguerre 多項式は (4) より，

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(r!)^2 (n-r)!} x^r$$

と表されるから，これを (16) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
L_n^k(x) &= \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) \\
&= \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(r!)^2 (n-r)!} x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(r!)^2 (n-r)!} x^r \\
&= \sum_{r=k}^{n} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(r!)^2 (n-r)!} \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \\
&= \sum_{r=k}^{n} (-1)^r \frac{(n!)^2}{r!(n-r)!(r-k)} !x^{r-k} \\
&= \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^r \frac{(n!)^2}{(m+k)!(n-m-k)!m!} x^m
\end{aligned}$$

これは，(15) 式の右辺の $\sum \cdots$ の部分と一致している．従って，Laguerre 陪多項式 (16) は Laguerre 陪微分方程式 (12) の解となることが示された.

Laguerre 陪多項式の母関数

式 (16) が成り立つことから，Laguerre 多項式の母関数について次の関係が成り立つことが分かる:

$$t^{-k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} \right) = \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) \frac{t^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{t^{n-k}}{n!}$$

従って，Laguerre 陪多項式の母関数は，(16) 式の微分が $k > n$ で 0 となることより，

$$E_g(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) \frac{t^{n-k}}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} L_n^k(x) \frac{t^{n-k}}{n!} \tag{17}$$

と表される.

Laguerre 陪多項式の昇降演算子

Laguerre 陪多項式には次のような昇降演算子が存在する:

$$\left(x\frac{d}{dx} - x + n + 1 \right) L_n^k(x) = \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) L_{n+1}^k(x), \tag{18}$$

$$\left(x\frac{d}{dx} - n + k \right) L_n^k(x) = -n^2 L_{n-1}^k(x), \tag{19}$$

ここで (18) の括弧の中身をその働きから上昇演算子，(19) の括弧の中身を下降演算子と呼ぶ.

この証明は，Laguerre 多項式の昇降演算子の証明とほぼ一緒であるが，今回は，求めたい (18)，(19) から逆にどのように示せばよいのかを確かめる方法をとろう．注意深く考えれば分かるように，最初から最後まで同値変形を行っているから，逆向きの流れが確かめられれば充分なのである.

まず，(18) 式の両辺に左から，

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}$$

を掛けると，

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}x\frac{d}{dx}L_n^k(x)+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}(n+1-x)L_n^k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x),$$

ここで $\sum$ をなかにいれれば，微分が偏微分になることに注意して，

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}L_n^k(x)\right)+\sum_{n=k}^{\infty}(n+1-x)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x),$$

ここで母関数で置き換えられるところを置き換えると，

$$x\frac{\partial E_g}{\partial x}+\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}-xE_g=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x),$$

ここで残った項をどのようにして母関数に置き換えられるか考える．まず，

$$\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}$$

の部分は，

$$\frac{d}{dt}(t^{n+1-k})=(n+1-k)t^{n-k}=(n+1)t^{n-k}-kt^{n-k}$$

となることより，

$$(n+1)t^{n-k}=\frac{d}{dt}(t^{n+1-k})+kt^{n-k}$$

で置き換えられる．従って，

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}&=\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}t^{n+1-k}+kt^{n-k}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n+1-k}}{n!}\right)+k\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}\\&=\frac{\partial}{\partial t}t\left(\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}\right)+k\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}\\&=\frac{\partial}{\partial t}(tE_g)+kE_g\end{aligned}$$

と表せることが分かる．次に，

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x),$$

の部分であるが，式のなかの Laguerre 陪多項式が $n+1$ で表されているのでこれを n に直すと，

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{t^{n-k-1}}{(n-1)!}\left(1-\frac{k}{n}\right)L_n^k(x)&=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k-1}}{n!}(n-k)L_n^k(x)\\&=\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{d}{dt}\frac{t^{n-k}}{n!}\\&=\frac{\partial E_g}{\partial t}\end{aligned}$$

が得られるので，以上より，

$$x\frac{\partial E_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(tE_g) + kE_g - xE_g = \frac{\partial E_g}{\partial t} \tag{20}$$

が示せればよい．いま，

$$\frac{\partial Eg}{\partial x} = -\frac{t}{1-t}E_g, \tag{21}$$
$$\frac{\partial Eg}{\partial t} = \left[\frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2}\right]E_g, \tag{22}$$

だから，これを (20) 式の左辺に代入して，

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial E_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(tE_g) + kE_g - xE_g &= x\frac{\partial E_g}{\partial x} + t\frac{\partial E_g}{\partial t} + (k+1-x)E_g \\
&= -\frac{xt}{1-t}E_g + t\left[\frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2}\right]E_g + (k+1-x)E_g \\
&= (k+1)\left(\frac{t}{1-t} + 1\right)E_g + \frac{-xt(1-t) - xt - x(1-t)^2}{(1-t)^2}E_g \\
&= (k+1)\left(\frac{t}{1-t} + 1\right)E_g + \frac{-\cancel{xt} + \cancel{xt^2} - \cancel{xt} - x + \cancel{2xt} - \cancel{xt^2}}{(1-t)^2}E_g \\
&= \left[\frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2}\right]E_g \\
&= \frac{\partial E_g}{\partial t}
\end{aligned}$$

よって (20) 式が確かめられた．

下降演算子に対する (19) 式の証明も全く同様の流れである．いま (19) 式の両辺に左から，

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}$$

を掛けると，

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}\right) - \sum_{n=k}^{\infty}(n-k)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!} = -\sum_{n=k}^{\infty}nL_{n-1}^k(x)\frac{t^{n-k}}{(n-1)!} \tag{23}$$

ここで，

$$\sum_{n=k}^{\infty}(n-k)L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)t\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{n-k}}{n!}\right) = t\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\left(\frac{t^{n-k}}{n!}\right)$$

及び，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty}nL_{n-1}^k(x)\frac{t^{n-k}}{(n-1)!} &= \sum_{n=k-1}^{\infty}(n+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}(n+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}(n-k+1)L_n^k(x)\frac{t^{n-k+1}}{n!} + k\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k+1}}{n!} \\
&= t\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k+1}}{n!}\right) + kt\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!} \\
&= t\frac{\partial}{\partial t}\left(t\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}\right) + kt\sum_{n=k}^{\infty}L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}
\end{aligned}$$

だから，それぞれ母関数 $E_g(x,\ t)$ で表して (23) 式に代入すると，

$$x\frac{\partial E_g}{\partial x} - t\frac{\partial E_g}{\partial t} = -t\frac{\partial}{\partial t}(tE_g) - ktE_g = -tE_g - t^2\frac{\partial E_g}{\partial t} - ktE_g = -t^2\frac{\partial E_g}{\partial t} - t(1+k)E_g$$

より，

$$x\frac{\partial E_g}{\partial x}+t(t-1)\frac{\partial E_g}{\partial t}+t(1+k)E_g=0 \tag{24}$$

を示せばよい．この式に (21)，(22) 式を代入すると，

$$\begin{aligned}-\frac{xt}{1-t}E_g+t(t-1)\left[\frac{k+1}{1-t}-\frac{x}{(1-t)^2}\right]E_g+t(1+k)E_g&=\cancel{-\frac{xt}{1-t}E_g}\cancel{-t(k+1)E_g}+\cancel{\frac{xt}{1-t}E_g}+\cancel{t(1+k)E_g}\\&=0\end{aligned}$$

よって (24) 式が示された．

Laguerre 陪多項式の漸化式

Laguerre 陪多項式の昇降演算子を用いると，容易に次の漸化式が証明できる:

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x)+(x+k-2n-1)L_n^k(x)+n^2L_{n-1}^k(x)=0 \tag{25}$$

この漸化式は量子力学において水素原子の波動関数を求める際に使用する．証明は次の通り:

まず，下降演算子 (19) 式より，

$$\begin{aligned}-n^2L_{n-1}^k(x)&=\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)L_n^k(x) &(26)\\&=\left(x\frac{d}{dx}-x+n+1+x-2n-1+k\right)L_n^k(x) &(27)\\&=\left(x\frac{d}{dx}-x+n+1\right)L_n^k(x)+(x-2n-1+k)\,L_n^k(x) &(28)\end{aligned}$$

最初の項は上昇演算子 (18) だから，置き換えると，

$$\begin{aligned}-n^2L_{n-1}^k(x)&=\left(x\frac{d}{dx}-x+n+1\right)L_n^k(x)+(x-2n-1+k)\,L_n^k(x) &(29)\\&=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x)+(x-2n-1+k)\,L_n^k(x) &(30)\end{aligned}$$

これより，

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x)+(x+k-2n-1)\,L_n^k(x)+n^2L_{n-1}^k(x)=0 \tag{31}$$

が示された．

Laguerre 陪多項式の直交性

次の式を証明すればよい．この関係式は水素原子のなかの電子の波動関数を求めるときに動径方向の波動関数を規格化するときにも用いる．

$$\int_0^\infty L_m^k(x)L_n^k(x)x^ke^{-x}dx=\frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn} \tag{32}$$

証明には母関数を用いる．

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^\infty\sum_{n=k}^\infty\frac{s^{m-k}t^{n-k}}{m!n!}\int_0^\infty L_m^k(x)L_n^k(x)x^ke^{-x}dx&=\int_0^\infty\sum_{m=k}^\infty L_m^k(x)\frac{s^{m-k}}{m!}\sum_{n=k}^\infty L_n^k(x)\frac{t^{n-k}}{n!}x^ke^{-x}dx\\&=\int_0^\infty\frac{(-1)^k}{(1-s)^{k+1}}e^{-\frac{xs}{1-s}}\frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}}e^{-\frac{xt}{1-t}}x^ke^{-x}dx\\&=\frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^kdx\end{aligned}$$

ここで，部分積分を用いると，

$$
\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^k dx \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\left[-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1}e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^k\right]_0^\infty \\
&\quad -\frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\int_0^\infty -\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1}e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}kx^{k-1}dx \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1}k\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^{k-1}dx \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\left[\frac{s(1-t)+t(1-s)+(1-s)(1-t)}{(1-s)(1-t)}\right]^{-1}k\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^{k-1}dx \\
&= \frac{1}{(1-s)^{k+1}}\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\left[\frac{\cancel{s}-\cancel{st}+\cancel{t}-st+1-\cancel{s}-\cancel{t}+\cancel{st}}{(1-s)(1-t)}\right]^{-1}k\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^{k-1}dx \\
&= \frac{k}{1-st}\frac{1}{(1-s)^k}\frac{1}{(1-t)^k}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}x^{k-1}dx \\
&= \frac{k}{1-st}I_{k-1} \\
&= \frac{k!}{(1-st)^k}I_0 \\
&= \frac{k!}{(1-st)^k}\frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}dx \\
&= \frac{k!}{(1-st)^k}\frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\left[-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1}e^{-\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)x}\right]_0^\infty \\
&= \frac{k!}{(1-st)^k}\frac{1}{1-s}\frac{1}{1-t}\left(\frac{s}{1-s}+\frac{t}{1-t}+1\right)^{-1} \\
&= \frac{k!}{(1-st)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

が得られるが，これは二項定理によって展開すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{k!}{(1-st)^{k+1}} &= k!\sum_{r=0}^\infty \frac{\prod_{j=0}^{r-1}[-(k+1)-j]}{r!}(-st)^r \\
&= k!\sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r\prod_{j=0}^{r-1}(k+1+j)}{r!}(-1)^r s^r t^r \\
&= k!\sum_{r=0}^\infty \frac{(k+r)!}{k!r!}s^r t^r \\
&= \sum_{r=0}^\infty \frac{(k+r)!}{r!}s^r t^r \\
&= \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!}s^{n-k}t^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^\infty\sum_{m=0}^\infty \frac{m!(n!)^2}{(n-k)!}\delta_{mn}\frac{s^{m-k}}{m!}\frac{t^{n-k}}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^\infty\sum_{n=k}^\infty \frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn}\frac{s^{m-k}}{m!}\frac{t^{n-k}}{n!}
\end{aligned}
$$

これより，同じ次数の項を比較して，

$$
\int_0^\infty L_m^k(x)L_n^k(x)x^k e^{-x}dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn}
$$

が示された.