定理 0.0.1 (多重積分の部分積分).
V を n 次元単連結閉領域とする．n 変数関数 u と n 変数 n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{v}$ に対して，

$$\int_V (\nabla u)\cdot \boldsymbol{v} d^n x = \int_{\partial V} u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS - \int_V u\nabla\cdot\boldsymbol{v} d^n x$$

が成り立つ．特に，∂V 上で $u=0$ とするときには，

$$\int_V (\nabla u)\cdot \boldsymbol{v} d^n x = -\int_V u\nabla\cdot\boldsymbol{v} d^n x$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は境界 ∂V の外向きの単位法線とする．

証明 一般に n 次元ガウスの発散定理より，任意の n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A} d^n x = \int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

が成り立つ．また，ライプニッツ則より，

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{v}) = (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v} + u\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS &= \int_V \nabla\cdot(u\boldsymbol{v}) d^n x \\
&= \int_V (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v} + u\nabla\cdot\boldsymbol{v} d^n x \\
&= \int_V (\nabla u)\cdot\boldsymbol{v} d^n x + \int_V u\nabla\cdot\boldsymbol{v} d^n x
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，定理の前半部が証明された．後半部は第 1 項が境界上での積分であることより，明らか． □

定理 0.0.2 (4 次元時空上の部分積分).
V を 4 次元単連結閉領域とする．スカラー u と反変ベクトル v^μ に対して,

$$\int_V (\partial_\mu u) v^\mu d^4x = \int_{\partial V} u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS - \int_V u\partial_\mu v^\mu d^4x$$

が成り立つ．特に，∂V 上で $u=0$ とするときには,

$$\int_V (\partial_\mu u) v^\mu d^4x = -\int_V u\partial_\mu v^\mu d^4x$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は境界 ∂V の外向きの単位法線とする．

証明 一般に 4 次元ガウスの発散定理より，任意の反変ベクトル A^μ に対して,

$$\int_V \partial_\mu A^\mu d^4x = \int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

が成り立つ．また，ライプニッツ則より,

$$\partial_\mu (uv^\mu) = (\partial_\mu u)v^\mu + u(\partial_\mu v^\mu)$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS &= \int_V \partial_\mu (uv^\mu) d^4x \\ &= \int_V (\partial_\mu u)v^\mu + u(\partial_\mu v^\mu) d^4x \\ &= \int_V (\partial_\mu u)v^\mu d^4x + \int_V u(\partial_\mu v^\mu) d^4x\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，定理の前半部が証明された．後半部は第 1 項が境界上での積分であることより，明らか． □