

0.1 フーリエ変換によってデルタ関数の積分表示式を導く

デルタ関数の積分表示式は大変便利なためいろいろなところで姿を見せる。ここではこのデルタ関数の積分表示式をフーリエ変換の知識を仮定して簡単に導くことにする。

定理 0.1.1.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

証明. まず、任意の関数 $f(t)$ をフーリエ変換すると、

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

と表される*1。この $F(\omega)$ を用いてフーリエ逆変換すると、

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

となる。ここでデルタ関数の定義式を考えると、積分、

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

によって定義されるものがデルタ関数であり、デルタ関数とは(途中の式変形は別にして)常にこのような積分の中にか使うことのできないいわゆる超関数であることに注意しよう。そこで今回デルタ関数の積分表示式を求めるにあたって、この積分の形に持っていくことを目標としよう。まず、式(2)を式(3)に代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

これが(4)式に等しいから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (6)$$

となる。これよりこの関係式が任意の関数 $f(t)$ について成り立つのであるから、

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (7)$$

であることが分かった。従って、

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

が示された。 □

*1 フーリエ変換の式は2つの流派があって、ここでの証明で用いるノルムを保存する形式のほかに、フーリエ変換の際に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ をつけないで、逆変換にその分 $\frac{1}{2\pi}$ をつける流派があるが、どちらの流派を用いても同じ結果を得るのでさほど気にする必要はない。