高階微分のライプニッツの公式

定理 0.1. 高階微分のライプニッツの公式

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

証明. 数学的帰納法で証明する．

$n=0$ のとき，

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(0)} = \sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r} f^{(0-r)}(x)g^{(r)}(x) = f^{0}(x)g^{0}(x) = f(x)g(x)$$

より成立する．n のとき成立すると仮定すると，

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

が成り立っているのでこの両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)^{(n+1)} &= \sum_{r=0}^{n} \left(\binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)\right)' \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r+1)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n+1-[r+1])}(x)g^{(r+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{s=1}^{n+1} \binom{n}{s-1} f^{(n+1-s)}(x)g^{(s)}(x) \qquad (\because s \equiv r+1) \\
&= \binom{n}{0} f^{(n+1-0)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s-1} f^{(n+1-s)}(x)g^{(s)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1-[n+1])}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{n} \left\{\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}\right\} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{r} f^{(n+1-r)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

よって $n+1$ でも成り立つことが示せた．ここで，

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!} \\
&= \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right) \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-r+1)r} \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} = \binom{n+1}{r}
\end{aligned}$$

を用いた．なお，全く同じ論法で二項定理も証明できる． □