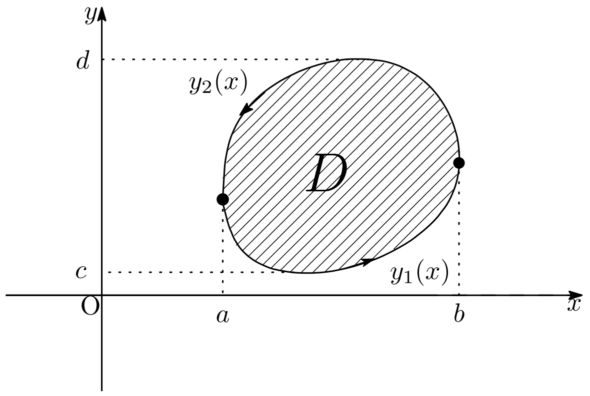
グリーンの定理

定理 1.1 (グリーンの定理)**.** 領域 D とその境界 ∂D において，$P(x,\,y)$, $Q(x,\,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が連続ならば，

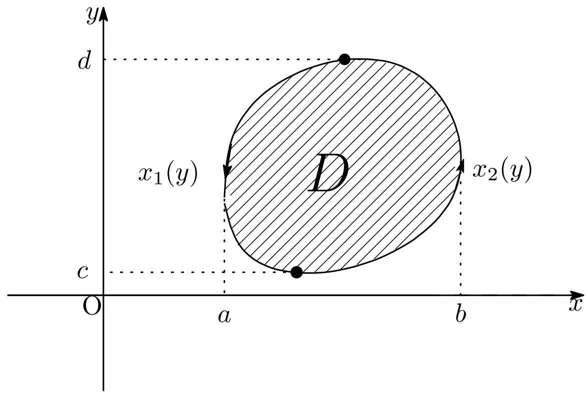
$$\int_{\partial D}(Pdx+Qdy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{1.1}$$

が成り立つ．

証明.



$y_1(x),\,y_2(x)$



$x_1(y),\,x_2(y)$

はじめに，領域 D が，上の図のように，

$$a\le x\le b,\qquad y_1(x)\le y\le y_2(x), \tag{1.2}$$

$$c\le y\le d,\qquad x_1(y)\le x\le x_2(y), \tag{1.3}$$

となっている場合について示す．このとき，

$$\begin{aligned}
\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy&=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx &(1.4)\\
&=\int_c^d dy\Big[Q\Big]_{x_1(y)}^{x_2(y)} &(1.5)\\
&=\int_c^d Q(x_2(y),\,y)-Q(x_1(y),\,y)dy &(1.6)\\
&=\int_c^d Q(x_2(y),\,y)dy+\int_d^c Q(x_1(y),\,y)dy &(1.7)\\
&=\int_{\partial D}Q(x,y)dy, &(1.8)
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy&=-\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy &(1.9)\\
&=-\int_a^b P(x,\,y_2(x))-P(x,\,y_1(x))dx &(1.10)\\
&=\int_a^b P(x,\,y_1(x))dx+\int_b^a P(x,\,y_2(x))dx &(1.11)\\
&=\int_{\partial D}P(x,\,y)dx, &(1.12)
\end{aligned}$$

が成り立つので，両辺を足して，

$$\int_{\partial D}(Pdx+Qdy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{1.13}$$

が上の図のような場合について示せた．

次に一般の領域の場合であるが，例えば下の左の図のような領域の場合，右の図のように領域を分割できるので，　このそれぞれの領域に対してグリーンの定理を適用すると，

$$\int_{\partial D_1}(Pdx+Qdy)=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{1.14}$$

$$\int_{\partial D_2}(Pdx+Qdy)=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{1.15}$$

が成り立つが，領域の分割をしている部分では，D_1 と D_2 の境界の向きが逆なため打ち消しあうので，

$$\partial D=\partial D_1+\partial D_2, \tag{1.16}$$

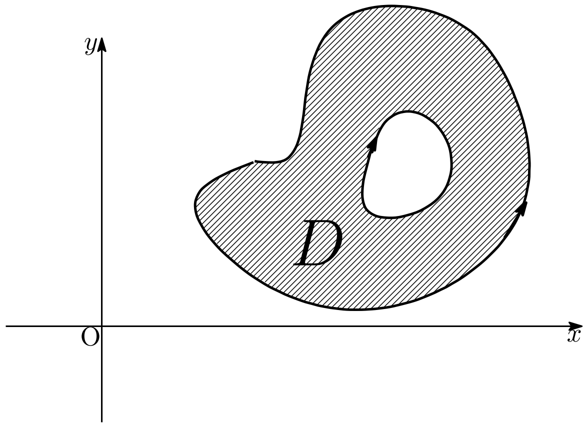
また当然，

$$D=D_1+D_2, \tag{1.17}$$

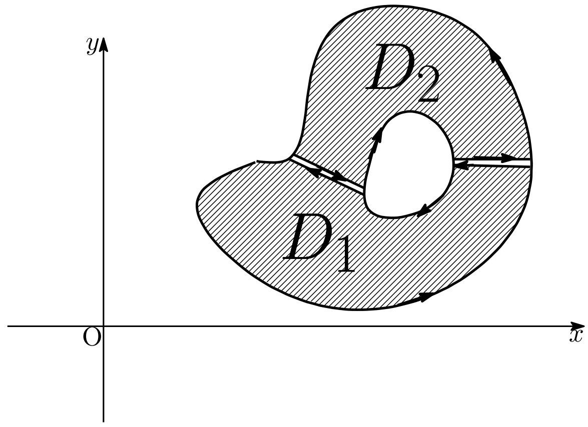
なので，結局，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}(Pdx+Qdy)&=\int_{\partial D_1}(Pdx+Qdy)+\int_{\partial D_2}(Pdx+Qdy) &(1.18)\\ &=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &(1.19)\\ &=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, &(1.20)\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，一般の領域に対してもグリーンの定理が成り立つことが示せた．



領域分割前



領域分割後

□