## ガウス積分の求め方

次の積分をガウス積分と呼ぶ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**証明.**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2
\end{aligned}$$

より、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を求めればよい。今、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置くと、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} d\theta \\
&= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$\square$