ガウスの発散定理

定理 1.1 (ガウスの発散定理)

ベクトル場 $E = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}$ に対して、区分的に滑らかな閉曲面 S が S の内部から外部へ向かう法線ベクトルによって向きが付けられているものとする。このとき S に囲まれた空間の領域を V とすると、

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V div\boldsymbol{E}dV$$

が成り立つ。

定義 1.1 (パラメータ表示された曲面)

$D \subset \boldsymbol{R}^2$ をある有界な連結領域とする。x, y, z をそれぞれ、D から $\boldsymbol{R}$ への $\boldsymbol{C}^1$ 級写像とするとき、

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$$

は曲面上の点を表す。このとき、

$$S = \{\boldsymbol{r}(u,v) | (u,v) \in D\}$$

を $\boldsymbol{r}(u,v)$ によってパラメータ表示された曲面と呼ぶ。

補題 1.1

S を $\boldsymbol{r}(u,v)$ によってパラメータ表示された曲面とするとき、

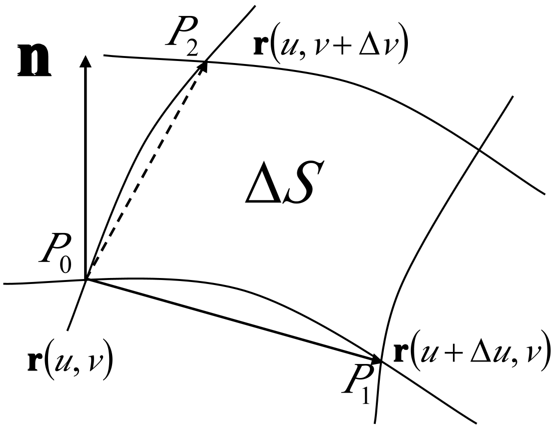
$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right|}$$

は曲面 S の単位法線となる。また、微小面積 dS に対して、

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv$$

が成り立つ。

証明　下の図において、



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} &= \boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v) &&= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \\
\overrightarrow{P_0P_2} &= \boldsymbol{r}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v) &&= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v + o(\Delta v) \\
\therefore \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\Delta u \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})
\end{aligned}
$$

が成り立っている。ここで、$\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ は互いに平行でなく、かつ極限をとれば、点 P_0 での接平面に含まれる。よって $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ はこの曲面の点 P_0 での法線になる。又、外積の性質より、

$$
\begin{aligned}
|\Delta S| &= \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right| + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}) \\
&= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\Delta u \Delta v + o(\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})
\end{aligned}
$$

が成り立つから、$d\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{n}dS$ と定義すれば、

$$
d\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) dudv
$$

が成り立つ。□

補題 1.2

S を $\boldsymbol{r}(u,v)$ でパラメータ表示された曲面とする。このとき、この曲面の単位法線を、

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$$

とすると、任意の $\boldsymbol{C}^1$ 級ベクトル場 $\boldsymbol{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + E_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + E_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$ に対して、

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_S E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} dS &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) dudv \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

だから、2 重積分の変数変換により、

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS \\
&= \iint_S (E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv\boldsymbol{k}\right) \\
&= \iint_S \left(E_x \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv + E_y \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dudv + E_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv\right) \\
&= \iint_S (E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy)
\end{aligned}$$

が成り立つ。□

定理 1.1 の証明　始めに、補題 1.2 より、

$$\iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \quad = \quad \iint_S (E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy)$$

が成り立っていることに注意しよう。すると、定理は、

$$\begin{aligned}\iint_S (E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy) \quad &= \quad \iiint_V div\boldsymbol{E}dV \\ &= \quad \iiint_V \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV\end{aligned}$$

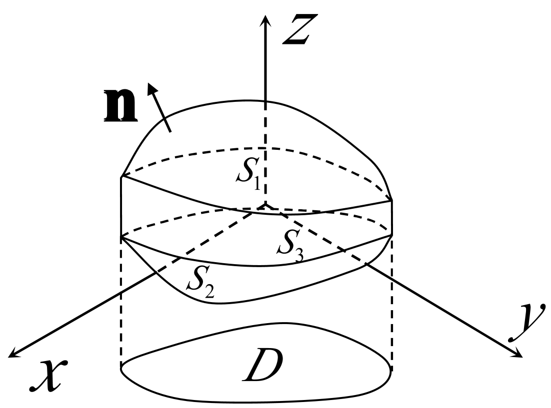
より、

$$\iint_S E_x dydz \quad = \quad \iiint_V \frac{\partial E_x}{\partial x} dxdydz \qquad (1)$$

$$\iint_S E_y dzdx \quad = \quad \iiint_V \frac{\partial E_y}{\partial y} dxdydz \qquad (2)$$

$$\iint_S E_z dxdy \quad = \quad \iiint_V \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz \qquad (3)$$

の 3 つの等式の証明に帰着する。最初に (3) の等式を証明しよう。始めに V が、$z_2(x,y) \leq z \leq z_1(x,y), (x,y) \in D$ の領域となる場合について証明しよう。下の図において、



曲面 S_1 を $z = z_1(x,y)$, 曲面 S_2 を $z = z_2(x,y)$ とし、曲面 $S = S_1 + S_2 + S_3$ の向きは、この曲面の内部の領域 V から外側を向く法線によって指定されているものとしよう。すると、

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) dxdy \\
&= \iint_D \left(E_z(x,y,z_2(x,y)) - E_z(x,y,z_1(x,y)) \right) dxdy \\
&= \iint_D E_z(x,y,z_2(x,y)) dxdy - \iint_D E_z(x,y,z_1(x,y)) dxdy
\end{aligned}
$$

ここで、S_1 においては、曲面 S_1 の向きを示す法線ベクトルの向きは、$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ の向きに等しいが、S_2 においては逆向きになることより、

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} E_z(x,y,z) dxdy &= \iint_D E_z(x,y,z_1(x,y)) dxdy \\
\iint_{S_2} E_z(x,y,z) dxdy &= -\iint_D E_z(x,y,z_2(x,y)) dxdy
\end{aligned}
$$

が成り立つ。また S_3 においては、$E_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ より、

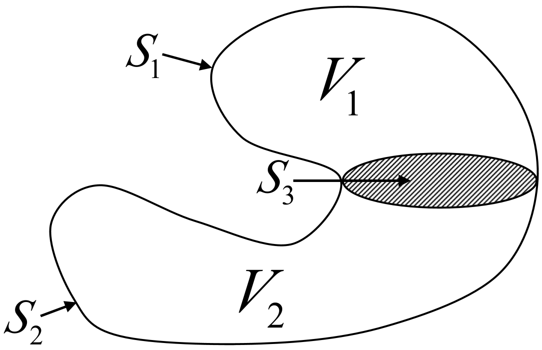
$$
\iint_{S_3} E_z(x,y,z) dxdy = \iint_{S_3} E_z(x,y,z) \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{S} = 0
$$

が成り立つ。よって、

$$
\begin{aligned}
\iint_S E_z(x,y,z) dxdy &= \iint_{S_1} E_z(x,y,z) dxdy + \iint_{S_2} E_z(x,y,z) dxdy + \iint_{S_3} E_z(x,y,z) dxdy \\
&= \iint_D E_z(x,y,z_1(x,y)) dxdy - \iint_D E_z(x,y,z_2(x,y)) dxdy \\
&= \iiint_V \frac{\partial E_z}{\partial z} dxdydz
\end{aligned}
$$

が示せた。同様の議論を E_x, E_y について行えば、(1), (2) も示せる。領域 V が一般の場合には一価の関数になるように領域を分割し、それぞれの領域に対して定理が成り立つとして、境界面での和をとると 0 になることを用いればよい。□

※領域を分割する場合の例を一つ示す。



上の図において、$S = S_1 + S_2, V = V_1 + V_2$ とする。すると求める式は、

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V div\boldsymbol{E}dV$$

となる。今、V_1 と V_2 に対して、

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1+S_3} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{V_1} div\boldsymbol{E}dV \tag{4}$$

$$\iint_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_3+S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{V_2} div\boldsymbol{E}dV \tag{5}$$

が成り立っている。ここで両方の式において、

$$\iint_{S_3} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$$

が現れているが、意味はそれぞれ違う。式 (4) では外向きの法線が"下向き"（z 軸負の方向）だが、式 (5) では"上向き"となるからである。よって、式 (4) と式 (5) を足すと、両方で打ち消しあうので、

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{S_1+S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iiint_{V_1} div\boldsymbol{E}dV + \iiint_{V_2} div\boldsymbol{E}dV \\
&= \iiint_{V_1+V_2} div\boldsymbol{E}dV \\
&= \iiint_V div\boldsymbol{E}dV
\end{aligned}$$

が示せた。