定理 0.1.1.

$$\Delta\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{1}$$

証明. 式 (1) の左辺カッコの中の形を分からないものとして次の関係式を仮定する:

$$\Delta G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2}$$

この式に対して,

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \tag{3}$$

とフーリエ変換すると，デルタ関数の積分表示式,

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \tag{4}$$

より,

$$\begin{aligned}
0 &= 4\pi\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + \Delta_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} + \Delta_{\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \tilde{G}(\boldsymbol{k})\Delta_{\boldsymbol{x}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] e^{-i\boldsymbol{x}'} d^3\boldsymbol{k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + (i\boldsymbol{k})\cdot(i\boldsymbol{k})\tilde{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] e^{-i\boldsymbol{x}'} d^3\boldsymbol{k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - |\boldsymbol{k}|^2\tilde{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] e^{-i\boldsymbol{x}'} d^3\boldsymbol{k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^2} - |\boldsymbol{k}|^2\tilde{G}(\boldsymbol{k})\right] e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{5}$$

これより,

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} \tag{6}$$

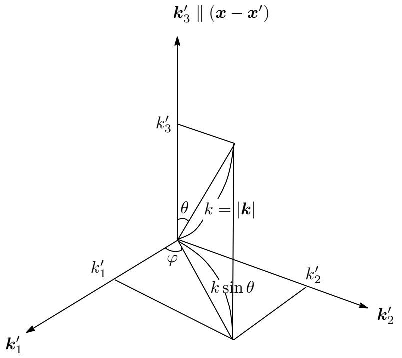
と置けば，フーリエ変換 (3) によって得られる $G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ は (2) を満たすことになる．そこで

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \tag{7}$$

より，積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \tag{8}$$

が求められればよいことが分かる.



そこで $k \equiv |\boldsymbol{k}|,\ \xi \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ と置いて，ベクトル $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ とベクトル $\boldsymbol{k}$ のなす角を θ にとる図のような極座標を考えると，

$$k_1' = k\sin\theta\cos\varphi,\ k_2' = k\sin\theta\sin\varphi,\ k_3' = k\cos\theta \tag{9}$$

となるので，

$$d^3\boldsymbol{k} = dk_1 dk_2 dk_3 = k^2\sin\theta dk d\theta d\varphi \tag{10}$$

となる．これを用いると，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} d^3\boldsymbol{k} \\
&= \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2} e^{ik\xi\cos\theta} \times k^2\sin\theta \\
&= \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ik\xi\cos\theta}\sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta e^{ik\xi\cos\theta}\sin\theta \\
&= 2\pi \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta - \frac{1}{ik\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}(ik\xi\cos\theta) e^{ik\xi\cos\theta} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dk \left[-\frac{e^{ik\xi\cos\theta}}{ik\xi}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2\pi}{\xi} \int_0^\infty dk \left[-\frac{e^{ik\xi\cos\theta}}{ik}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2\pi}{\xi} \int_0^\infty dk \left[\frac{e^{ik\xi}}{ik} - \frac{e^{-ik\xi}}{ik}\right] \\
&= \frac{4\pi}{\xi} \int_0^\infty dk \frac{\sin k\xi}{k} \\
&= \frac{4\pi}{\xi}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2\pi^2}{\xi} \\
&= \frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}
\end{aligned} \tag{11}$$

よって，$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ は，

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{2\pi^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{12}$$

となることが分かった．これが求めたかった答えである． □